Inégalités de Chebyshev et applications

Notations

- On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour tout réel $x \geq 2$ on note $\pi(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.
- Pour tout p de $\mathbb{P}$ et tout n de $\mathbb{N}$ (avec $n \geq 2$) on note $u_p(n)$ l'exposant de p (éventuellement nul) dans la décomposition de l'entier n en produit de facteurs premiers.

  On note alors $v_p(n) = u_p(n!)$ et $\alpha_p(n) = u_p\left(\binom{2n}{n}\right)$.

  On peut donc écrire : $n = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{u_p(n)}$, $\quad n! = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}$, $\quad$ et $\binom{2n}{n} = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(n)}$.
- On note $[x]$ la partie entière de tout réel x.

Objectifs du problème

- Obtenir un encadrement de $\pi(x)$ (une minoration dans la partie I, et une majoration dans la partie II). Ces résultats entrent dans le cadre des inégalités dites “de Chebyshev”.
- Encadrer la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à x (partie III).
- En déduire un encadrement du n^{ieme} nombre premier (partie IV)

Première partie : une minoration de $\pi(x)$.

Dans les questions 1 et 2, n désigne un entier naturel donné, avec $n \geq 2$.

1. Dans cette question, p est un entier premier donné.
   (a) Soit k un entier naturel strictement positif.
   Montrer que le nombre de multiples de p^k dans $\{1, \ldots, n\}$ est $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. [S]
   (b) En déduire qu'on peut écrire $v_p(n) = \sum\limits_{k\geq 1} \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$, cette somme étant finie. [S]
   (c) Montrer alors que $\alpha_p(n) = v_p(2n) - 2v_p(n) = \sum\limits_{k\geq 1} \left(\left[\dfrac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\dfrac{n}{p^k}\right]\right)$. [S]
2. (a) Vérifier que pour tout réel x, la quantité $[2x] - 2[x]$ est égale 0 ou à 1. [S]
   (b) Pour tout p de $\mathbb{P}$, soit $\gamma_p(n)$ le plus grand entier γ tel que $p^\gamma \leq 2n$.
   Déduire de la question précédente que $\alpha_p(n) \leq \gamma_p(n)$. [S]
   (c) Soit p un diviseur premier de $\binom{2n}{n}$. Montrer que $p \leq 2n$. [S]
   (d) En déduire les inégalités $\binom{2n}{n} \leq \prod\limits_{p\leq 2n} p^{\gamma_p(n)} \leq (2n)^{\pi(2n)}$. [S]
3. (a) Montrer que $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ et en déduire l'inégalité $\pi(2n) \geq \dfrac{n\ln 2}{\ln(2n)}$ pour $n \geq 1$. [S]
   (b) Soit x un réel, avec $x \geq 2$. On pose $n = \left[\dfrac{x}{2}\right]$.
   Déduire de la question précédente l'inégalité $\pi(x) \geq \dfrac{x\ln 2}{4\ln x}$ pour $x \geq 2$. [S]

Deuxième partie : une majoration de $\pi(x)$

1. (a) Montrer que tout entier premier p tel que $n < p \leq 2n$ divise $\binom{2n}{n}$. [S]
   (b) En déduire les inégalités $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}$. [S]
   (c) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ et en déduire $\pi(2n) - \pi(n) \leq \dfrac{2n\ln 2}{\ln n}$ pour $n \geq 2$. [S]
2. (a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 0$, on a $\pi(2^{k+1}) \leq 2^k$. [S]
   (b) Pour tout entier $k \geq 0$, montrer que $(k+1)\pi(2^{k+1}) - k\pi(2^k) \leq 3 \cdot 2^k$. [S]
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $(n+1)\pi(2^{n+1}) \leq 3 \cdot 2^{n+1}$. [S]
   (d) Soit x un réel ($x \geq 2$), et n l'unique entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$.
   Déduire de ce qui précède l'inégalité $\pi(x) \leq \dfrac{6x\ln 2}{\ln x}$. [S]

Conclusion des parties I et II : pour tout $x \geq 2$, $\dfrac{x\ln 2}{4\ln x} \leq \pi(x) \leq \dfrac{6\,x\ln 2}{\ln x}$

Troisième partie : la somme des inverses des entiers premiers

Pour tout réel $x \geq 2$, on note $S(x) = \sum_{p\leq x} \dfrac{1}{p}$ la somme des inverses des entiers premiers $p \leq x$.

Par exemple $S(12) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{11} = \dfrac{2927}{2310}$.

Dans cette partie, on prouve que l'ordre de grandeur de $S(x)$ est $\ln(\ln x)$ quand $x \to +\infty$.

Dans toute cette partie, on se donne un entier $n \geq 3$.

1. (a) Montrer que $S(n) = \sum_{p\leq n} \dfrac{1}{p}$ s'écrit $S(n) = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k}$. [S]
   (b) En déduire $S(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \dfrac{\pi(k)}{k(k+1)} + \dfrac{\pi(n)}{n}$. [S]
   (c) En utilisant les résultats finaux des parties I et II, prouver l'encadrement :
   $$\frac{\ln 2}{4}\Big(\frac{1}{\ln n} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k}\Big) \leq S(n) \leq 6\ln 2\Big(\frac{1}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k}\Big).$$ [S]
2. (a) Montrer que si $k \geq 3$ on a : $\ln\ln(k+1) - \ln\ln k \leq \dfrac{1}{k\ln k} \leq \ln\ln k - \ln\ln(k-1)$. [S]
   (b) En déduire qu'il existe deux constantes strictement positives λ, μ (qu'on ne cherchera pas à calculer) telles que : $\forall\, n \geq 3,\ \lambda\ \ln(\ln n) \leq S(n) \leq \mu\ \ln(\ln n)$. [S]
   (c) Remarquer que la première inégalité implique notamment $\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$. [S]

Quatrième partie : un encadrement du n^{ieme} nombre premier

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Utiliser la question (II.2d) pour prouver la minoration $p_n \geq \dfrac{n \ln n}{6 \ln 2}$. [S]
2. (a) Vérifier que si $x > 2000$ alors $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{\ln 2}{4}$. [S]

   (b) En utilisant (I.3b), prouver alors que si $p_n \geq 2000$ on a $\dfrac{\ln p_n}{\sqrt{p_n}} \leq \dfrac{\ln 2}{4} \leq \dfrac{n \ln p_n}{p_n}$.
   En déduire que si $p_n \geq 2000$ alors $p_n \leq n^2$. [S]

   (c) Montrer alors que $p_n \leq \dfrac{8n \ln n}{\ln 2}$, toujours avec la condition $p_n \geq 2000$. [S]

   (d) Ecrire une instruction Maple vérifiant que $p_n \leq \dfrac{8n \ln n}{\ln 2}$ pour $2 \leq n$ et $p_n < 2000$. [S]

Conclusion de la partie III : pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{n \ln n}{6 \ln 2} \leq p_n \leq \dfrac{8n \ln n}{\ln 2}$

Contexte historique

– Les parties I et II du problème donnent $\dfrac{\ln 2}{4} \dfrac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6 \ln 2 \dfrac{x}{\ln x}$ pour $x \geq 2$.
  On prouve en fait que $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$: c'est le *théorème des nombres premiers.*
  Ce résultat, conjecturé pour la première fois par **Euler** (agé de quinze ans) en 1722, ne fut prouvé qu'en 1896 par **Hadamard** (1865-1963) et **De La Vallée Poussin** (1866-1962).
  Vers 1850, **Chebishev** (1821-1894) avait obtenu les inégalités $\dfrac{7}{8} \dfrac{\ln x}{x} \leq \pi(x) \leq \dfrac{9}{8} \dfrac{\ln x}{x}$.

– La partie III montre qu'un ordre de grandeur de la somme $S(x)$ des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à x est $\ln(\ln x)$. On montre en fait qu'on a le développement asymptotique $S(x) = \ln(\ln x) + B_1 + o(1)$ avec $B_1 \approx 0.2614972128$ (constante de Mertens).
  C'est **Euler** (1707-1783) qui le premier, en 1737, a prouvé que $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.

– La partie IV donne un encadrement du n^{eme} nombre premier p_n.
  On montre en fait que $p_n \underset{+\infty}{\sim} n \ln n$.
  Plus précisément, on a $n \ln n + n \ln \ln n - 10n < p_n < n \ln n + n \ln \ln n + 8n$ pour $n \geq 4$.