Inégalités de Chebyshev et applications

Notations

- On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour tout réel $x \geq 2$ on note $\pi(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.
- Pour tout p de $\mathbb{P}$ et tout n de $\mathbb{N}$ (avec $n \geq 2$) on note $u_p(n)$ l'exposant de p (éventuellement nul) dans la décomposition de l'entier n en produit de facteurs premiers.

  On note alors $v_p(n) = u_p(n!)$ et $\alpha_p(n) = u_p\left(\binom{2n}{n}\right)$.

  On peut donc écrire : $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{u_p(n)}$, $n! = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}$, et $\binom{2n}{n} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\alpha_p(n)}$.
- On note $[x]$ la partie entière de tout réel x.

Objectifs du problème

- Obtenir un encadrement de $\pi(x)$ (une minoration dans la partie I, et une majoration dans la partie II). Ces résultats entrent dans le cadre des inégalités dites "de Chebyshev".
- Encadrer la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à x (partie III).
- En déduire un encadrement du n^{ieme} nombre premier (partie IV)

Première partie : une minoration de $\pi(x)$.

Dans les questions 1 et 2, n désigne un entier naturel donné, avec $n \geq 2$.

1. Dans cette question, p est un entier premier donné.
   (a) Soit k un entier naturel strictement positif.
   Montrer que le nombre de multiples de p^k dans $\{1, \ldots, n\}$ est $\left[\frac{n}{p^k}\right]$. [S]
   (b) En déduire qu'on peut écrire $v_p(n) = \sum_{k\geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$, cette somme étant finie. [S]
   (c) Montrer alors que $\alpha_p(n) = v_p(2n) - 2v_p(n) = \sum_{k\geq 1} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$. [S]
2. (a) Vérifier que pour tout réel x, la quantité $[2x] - 2[x]$ est égale 0 ou à 1. [S]
   (b) Pour tout p de $\mathbb{P}$, soit $\gamma_p(n)$ le plus grand entier γ tel que $p^\gamma \leq 2n$.
   Déduire de la question précédente que $\alpha_p(n) \leq \gamma_p(n)$. [S]
   (c) Soit p un diviseur premier de $\binom{2n}{n}$. Montrer que $p \leq 2n$. [S]
   (d) En déduire les inégalités $\binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq 2n} p^{\gamma_p(n)} \leq (2n)^{\pi(2n)}$. [S]
3. (a) Montrer que $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ et en déduire l'inégalité $\pi(2n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln(2n)}$ pour $n \geq 1$. [S]
   (b) Soit x un réel, avec $x \geq 2$. On pose $n = \left[\frac{x}{2}\right]$.
   Déduire de la question précédente l'inégalité $\pi(x) \geq \frac{x \ln 2}{4 \ln x}$ pour $x \geq 2$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Deuxième partie : une majoration de $\pi(x)$

1. (a) Montrer que tout entier premier p tel que $n < p \leq 2n$ divise $\binom{2n}{n}$. [S]

   (b) En déduire les inégalités $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}$. [S]

   (c) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ et en déduire $\pi(2n) - \pi(n) \leq \dfrac{2n \ln 2}{\ln n}$ pour $n \geq 2$. [S]

2. (a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 0$, on a $\pi(2^{k+1}) \leq 2^k$. [S]

   (b) Pour tout entier $k \geq 0$, montrer que $(k+1)\pi(2^{k+1}) - k\pi(2^k) \leq 3 \cdot 2^k$. [S]

   (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $(n+1)\pi(2^{n+1}) \leq 3 \cdot 2^{n+1}$. [S]

   (d) Soit x un réel ($x \geq 2$), et n l'unique entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$.
   Déduire de ce qui précède l'inégalité $\pi(x) \leq \dfrac{6x \ln 2}{\ln x}$. [S]

Conclusion des parties I et II : pour tout $x \geq 2$, $\dfrac{x \ln 2}{4 \ln x} \leq \pi(x) \leq \dfrac{6\, x \ln 2}{\ln x}$

Troisième partie : la somme des inverses des entiers premiers

Pour tout réel $x \geq 2$, on note $S(x) = \sum_{p\leq x} \dfrac{1}{p}$ la somme des inverses des entiers premiers $p \leq x$.

Par exemple $S(12) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{11} = \dfrac{2927}{2310}$.

Dans cette partie, on prouve que l'ordre de grandeur de $S(x)$ est $\ln(\ln x)$ quand $x \to +\infty$.

Dans toute cette partie, on se donne un entier $n \geq 3$.

1. (a) Montrer que $S(n) = \sum_{p\leq n} \dfrac{1}{p}$ s'écrit $S(n) = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k}$. [S]

   (b) En déduire $S(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \dfrac{\pi(k)}{k(k+1)} + \dfrac{\pi(n)}{n}$. [S]

   (c) En utilisant les résultats finaux des parties I et II, prouver l'encadrement :
   $$\frac{\ln 2}{4}\left(\frac{1}{\ln n} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k}\right) \leq S(n) \leq 6 \ln 2\left(\frac{1}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}\right).$$ [S]

2. (a) Montrer que si $k \geq 3$ on a : $\ln\ln(k+1) - \ln\ln k \leq \dfrac{1}{k \ln k} \leq \ln\ln k - \ln\ln(k-1)$. [S]

   (b) En déduire qu'il existe deux constantes strictement positives λ, μ (qu'on ne cherchera pas à calculer) telles que : $\forall\, n \geq 3,\ \lambda \ln(\ln n) \leq S(n) \leq \mu \ln(\ln n)$. [S]

   (c) Remarquer que la première inégalité implique notamment $\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Quatrième partie : un encadrement du n^{ieme} nombre premier

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Utiliser la question (II.2d) pour prouver la minoration $p_n \geq \dfrac{n\ln n}{6\ln 2}$. [S]

2. (a) Vérifier que si $x > 2000$ alors $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{\ln 2}{4}$. [S]

   (b) En utilisant (I.3b), prouver alors que si $p_n \geq 2000$ on a $\dfrac{\ln p_n}{\sqrt{p_n}} \leq \dfrac{\ln 2}{4} \leq \dfrac{n\ln p_n}{p_n}$.
   En déduire que si $p_n \geq 2000$ alors $p_n \leq n^2$. [S]

   (c) Montrer alors que $p_n \leq \dfrac{8n\ln n}{\ln 2}$, toujours avec la condition $p_n \geq 2000$. [S]

   (d) Ecrire une instruction Maple vérifiant que $p_n \leq \dfrac{8n\ln n}{\ln 2}$ pour $2 \leq n$ et $p_n < 2000$. [S]

Conclusion de la partie III : pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{n\ln n}{6\ln 2} \leq p_n \leq \dfrac{8n\ln n}{\ln 2}$

Contexte historique

– Les parties I et II du problème donnent $\dfrac{\ln 2}{4}\dfrac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6\ln 2\dfrac{x}{\ln x}$ pour $x \geq 2$.
On prouve en fait que $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$: c'est le *théorème des nombres premiers.*
Ce résultat, conjecturé pour la première fois par **Euler** (agé de quinze ans) en 1722, ne fut prouvé qu'en 1896 par **Hadamard** (1865-1963) et **De La Vallée Poussin** (1866-1962).
Vers 1850, **Chebishev** (1821-1894) avait obtenu les inégalités $\dfrac{7}{8}\dfrac{\ln x}{x} \leq \pi(x) \leq \dfrac{9}{8}\dfrac{\ln x}{x}$.

– La partie III montre qu'un ordre de grandeur de la somme $S(x)$ des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à x est $\ln(\ln x)$. On montre en fait qu'on a le développement asymptotique $S(x) = \ln(\ln x) + B_1 + o(1)$ avec $B_1 \approx 0.2614972128$ (constante de Mertens).
C'est **Euler** (1707-1783) qui le premier, en 1737, a prouvé que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

– La partie IV donne un encadrement du n^{eme} nombre premier p_n.
On montre en fait que $p_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln n$.
Plus précisément, on a $n\ln n + n\ln\ln n - 10n < p_n < n\ln n + n\ln\ln n + 8n$ pour $n \geq 4$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.