

## Inégalités de Chebyshev et applications

### Notations

- On note  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers.
- Pour tout réel  $x \geq 2$  on note  $\pi(x)$  le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à  $x$ .
- Pour tout  $p$  de  $\mathbb{P}$  et tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  (avec  $n \geq 2$ ) on note  $u_p(n)$  l'exposant de  $p$  (éventuellement nul) dans la décomposition de l'entier  $n$  en produit de facteurs premiers.

On note alors  $v_p(n) = u_p(n!)$  et  $\alpha_p(n) = u_p\left(\binom{2n}{n}\right)$ .

On peut donc écrire :  $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{u_p(n)}$ ,  $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(n)}$ , et  $\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p(n)}$ .

- On note  $[x]$  la partie entière de tout réel  $x$ .

### Objectifs du problème

- Obtenir un encadrement de  $\pi(x)$  (une minoration dans la partie I, et une majoration dans la partie II). Ces résultats entrent dans le cadre des inégalités dites “de Chebyshev”.
- Encadrer la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$  (partie III).
- En déduire un encadrement du  $n^{\text{ième}}$  nombre premier (partie IV)

### Première partie : une minoration de $\pi(x)$ .

Dans les questions 1 et 2,  $n$  désigne un entier naturel donné, avec  $n \geq 2$ .

1. Dans cette question,  $p$  est un entier premier donné.

- (a) Soit  $k$  un entier naturel strictement positif.

Montrer que le nombre de multiples de  $p^k$  dans  $\{1, \dots, n\}$  est  $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ . [S]

- (b) En déduire qu'on peut écrire  $v_p(n) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$ , cette somme étant finie. [S]

- (c) Montrer alors que  $\alpha_p(n) = v_p(2n) - 2v_p(n) = \sum_{k \geq 1} \left( \left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] \right)$ . [S]

2. (a) Vérifier que pour tout réel  $x$ , la quantité  $[2x] - 2[x]$  est égale 0 ou à 1. [S]

- (b) Pour tout  $p$  de  $\mathbb{P}$ , soit  $\gamma_p(n)$  le plus grand entier  $\gamma$  tel que  $p^\gamma \leq 2n$ .

Déduire de la question précédente que  $\alpha_p(n) \leq \gamma_p(n)$ . [S]

- (c) Soit  $p$  un diviseur premier de  $\binom{2n}{n}$ . Montrer que  $p \leq 2n$ . [S]

- (d) En déduire les inégalités  $\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq 2n} p^{\gamma_p(n)} \leq (2n)^{\pi(2n)}$ . [S]

3. (a) Montrer que  $\binom{2n}{n} \geq 2^n$  et en déduire l'inégalité  $\pi(2n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln(2n)}$  pour  $n \geq 1$ . [S]

- (b) Soit  $x$  un réel, avec  $x \geq 2$ . On pose  $n = \left[\frac{x}{2}\right]$ .

Déduire de la question précédente l'inégalité  $\pi(x) \geq \frac{x \ln 2}{4 \ln x}$  pour  $x \geq 2$ . [S]

**Deuxième partie : une majoration de  $\pi(x)$** 

1. (a) Montrer que tout entier premier  $p$  tel que  $n < p \leq 2n$  divise  $\binom{2n}{n}$ . [S]
- (b) En déduire les inégalités  $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}$ . [S]
- (c) Montrer que  $\binom{2n}{n} \leq 4^n$  et en déduire  $\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{2n \ln 2}{\ln n}$  pour  $n \geq 2$ . [S]
2. (a) Vérifier que pour tout entier  $k \geq 0$ , on a  $\pi(2^{k+1}) \leq 2^k$ . [S]
- (b) Pour tout entier  $k \geq 0$ , montrer que  $(k+1)\pi(2^{k+1}) - k\pi(2^k) \leq 3 \cdot 2^k$ . [S]
- (c) En déduire que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $(n+1)\pi(2^{n+1}) \leq 3 \cdot 2^{n+1}$ . [S]
- (d) Soit  $x$  un réel ( $x \geq 2$ ), et  $n$  l'unique entier tel que  $2^n \leq x < 2^{n+1}$ .  
 Déduire de ce qui précède l'inégalité  $\pi(x) \leq \frac{6x \ln 2}{\ln x}$ . [S]

 Conclusion des parties I et II : pour tout  $x \geq 2$ ,  $\frac{x \ln 2}{4 \ln x} \leq \pi(x) \leq \frac{6x \ln 2}{\ln x}$ 
**Troisième partie : la somme des inverses des entiers premiers**

Pour tout réel  $x \geq 2$ , on note  $S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  la somme des inverses des entiers premiers  $p \leq x$ .

Par exemple  $S(12) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} = \frac{2927}{2310}$ .

Dans cette partie, on prouve que l'ordre de grandeur de  $S(x)$  est  $\ln(\ln x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Dans toute cette partie, on se donne un entier  $n \geq 3$ .

1. (a) Montrer que  $S(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$  s'écrit  $S(n) = \sum_{k=2}^n \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k}$ . [S]
- (b) En déduire  $S(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}$ . [S]
- (c) En utilisant les résultats finaux des parties I et II, prouver l'encadrement :  

$$\frac{\ln 2}{4} \left( \frac{1}{\ln n} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k} \right) \leq S(n) \leq 6 \ln 2 \left( \frac{1}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k} \right)$$
. [S]
2. (a) Montrer que si  $k \geq 3$  on a :  $\ln \ln(k+1) - \ln \ln k \leq \frac{1}{k \ln k} \leq \ln \ln k - \ln \ln(k-1)$ . [S]
- (b) En déduire qu'il existe deux constantes strictement positives  $\lambda, \mu$  (qu'on ne cherchera pas à calculer) telles que :  $\forall n \geq 3, \lambda \ln(\ln n) \leq S(n) \leq \mu \ln(\ln n)$ . [S]
- (c) Remarquer que la première inégalité implique notamment  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$ . [S]

**Quatrième partie : un encadrement du  $n^{\text{ième}}$  nombre premier**

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $p_n$  le  $n^{\text{ème}}$  nombre premier.

1. Utiliser la question (II.2d) pour prouver la minoration  $p_n \geq \frac{n \ln n}{6 \ln 2}$ . [S]
2. (a) Vérifier que si  $x > 2000$  alors  $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln 2}{4}$ . [S]
  - (b) En utilisant (I.3b), prouver alors que si  $p_n \geq 2000$  on a  $\frac{\ln p_n}{\sqrt{p_n}} \leq \frac{\ln 2}{4} \leq \frac{n \ln p_n}{p_n}$ .  
En déduire que si  $p_n \geq 2000$  alors  $p_n \leq n^2$ . [S]
  - (c) Montrer alors que  $p_n \leq \frac{8n \ln n}{\ln 2}$ , toujours avec la condition  $p_n \geq 2000$ . [S]
  - (d) Ecrire une instruction Maple vérifiant que  $p_n \leq \frac{8n \ln n}{\ln 2}$  pour  $2 \leq n$  et  $p_n < 2000$ . [S]

Conclusion de la partie III : pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\frac{n \ln n}{6 \ln 2} \leq p_n \leq \frac{8n \ln n}{\ln 2}$

**Contexte historique**

- Les parties I et II du problème donnent  $\frac{\ln 2}{4} \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq 6 \ln 2 \frac{x}{\ln x}$  pour  $x \geq 2$ .  
On prouve en fait que  $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$  : c'est le *théorème des nombres premiers*.  
Ce résultat, conjecturé pour la première fois par **Euler** (agé de quinze ans) en 1722, ne fut prouvé qu'en 1896 par **Hadamard** (1865-1963) et **De La Vallée Poussin** (1866-1962).  
Vers 1850, **Chebishev** (1821-1894) avait obtenu les inégalités  $\frac{7}{8} \frac{\ln x}{x} \leq \pi(x) \leq \frac{9}{8} \frac{\ln x}{x}$ .
- La partie III montre qu'un ordre de grandeur de la somme  $S(x)$  des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$  est  $\ln(\ln x)$ . On montre en fait qu'on a le développement asymptotique  $S(x) = \ln(\ln x) + B_1 + o(1)$  avec  $B_1 \approx 0.2614972128$  (constante de Mertens).  
C'est **Euler** (1707-1783) qui le premier, en 1737, a prouvé que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$ .
- La partie IV donne un encadrement du  $n^{\text{ème}}$  nombre premier  $p_n$ .  
On montre en fait que  $p_n \underset{+\infty}{\sim} n \ln n$ .  
Plus précisément, on a  $n \ln n + n \ln \ln n - 10n < p_n < n \ln n + n \ln \ln n + 8n$  pour  $n \geq 4$ .