# Le "miracle" de Morley

En 1899, **Frank Morley**, de nationalité anglaise, alors professeur au **Haverford College** (Pennsylvanie), découvrit un résultat qui figure aujourd'hui parmi les joyaux de la géométrie, et connu sous le nom de théorème (ou plus emphatiquement "miracle") de Morley.

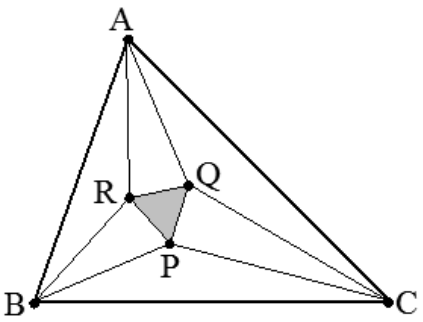
Voici comment s'énonce ce résultat :

*Soit $A, B, C$ trois points non alignés du plan.*

*On construit les* trisectrices *intérieures au triangle $ABC$, qui partagent donc les angles aux sommets en trois angles égaux.*

*Ces trisectrices se coupent deux à deux aux points $P, Q, R$, comme l'indique la figure.*

*Alors le triangle $PQR$ est équilatéral.*







Le qualificatif de "miraculeux" tient au fait qu'un résultat aussi simple dans son énoncé (mais pas dans ses différentes démonstrations) n'ait été découvert que vers le début du 20$^{e}$ siècle.

Ce problème est consacré à l'étude de quelques-unes des preuves de ce théorème.

## I. Les preuves de A. Letac (1939) et de L. Bankoff (1962)

On pose $(\widehat{AB, AC}) = 3\alpha$, $(\widehat{BC, BA}) = 3\beta$, $(\widehat{CA, CB}) = 3\gamma$, avec $\alpha, \beta, \gamma$ dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.
Avec ces notations, on a bien sûr l'égalité $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des cotés du triangle $ABC$.
$P, Q, R$ sont définis comme ci-dessus. Soit $r$ le rayon du cercle circonscrit à $ABC$.

1. Justifier les égalités $\dfrac{a}{\sin 3\alpha} = \dfrac{b}{\sin 3\beta} = \dfrac{c}{\sin 3\gamma} = 2r$. [S]
2. Par une méthode analogue appliquée à $BPC$, montrer que $\dfrac{BP}{\sin\gamma} = 2r\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$. [S]
3. Montrer que $\sin 3x = 4\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ pour tout $x$.
   En déduire une nouvelle expression de la longueur $BP$ en fonction de $r, \alpha, \gamma$.
   Par analogie donner l'expression de la longueur $BR$ en fonction de $r, \alpha, \gamma$. [S]
4. Soit $x, y, z$ trois réels tels que $x + y + z = \pi$.
   Prouver l'égalité : $\sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y \cos z = \sin^2 z$. [S]
5. Développer l'égalité $\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{BR} - \overrightarrow{BP}\|^2$.
   En déduire $PR = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ et conclure (fin de la méthode de **A. Letac**) [S]
6. La méthode de **L. Bankoff** est une variante qui se place à l'issue de la question (3).
   On pose $x = \frac{\pi}{3} + \gamma$, $y = \frac{\pi}{3} + \alpha$, $(\widehat{PR, PB}) = x'$ et $(\widehat{RB, RP}) = y'$, avec $x', y'$ dans $]0, \pi[$.
   (a) Observer que $BP\sin x = BR\sin y$ et que $BP\sin x' = BR\sin y'$. [S]
   (b) Prouver l'égalité $x' + y' = x + y$ et en déduire $x' = x$ et $y' = y$. [S]
   (c) Par analogie, préciser la valeur $(\widehat{PC, PQ})$. En déduire $(\widehat{PQ, PR}) = \frac{\pi}{3}$ et conclure. [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

## II. La preuve de D. J. Newman (1996)

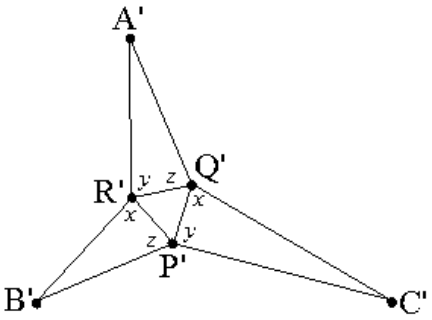
Au lieu de partir du triangle $ABC$ pour former et étudier $PQR$, certaines démonstrations, comme celle de D.J.Newman, consistent à partir d'un triangle équilatéral et à reformer autour de lui le triangle $ABC$ (ou du moins un triangle semblable à $ABC$.)

On se donne donc un triangle équilatéral $P'Q'R'$, que l'on suppose d'arête $a$ pour fixer les idées.

Soit $\alpha, \beta, \gamma$ dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, avec $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Pour simplifier les notations, on note :

$x=\frac{\pi}{3}+\alpha$, $y=\frac{\pi}{3}+\beta$ et $z=\frac{\pi}{3}+\gamma$.




A l'extérieur de $P'Q'R'$, on mène $P'C'Q'$, $Q'A'R'$, $R'B'P'$ tels que :

$(P'\widehat{C'},\widehat{P'Q'})=y$ $\quad(Q'\widehat{P'},\widehat{Q'C'})=x$

$(Q'\widehat{A'},\widehat{Q'R'})=z$ $\quad(R'\widehat{Q'},\widehat{R'A'})=y$

$(R'\widehat{B'},\widehat{R'P'})=x$ $\quad(P'\widehat{R'},\widehat{P'B'})=z$

1. Préciser la mesure des angles $(A'\widehat{R'},\widehat{A'Q'})$, $(B'\widehat{P'},\widehat{B'R'})$ et $(C'\widehat{Q'},\widehat{C'P'})$. [S]
2. Prouver les égalités $B'P'\sin\beta = a\sin x = C'P'\sin\gamma$. [S]
3. Montrer que $(P'\widehat{B'},\widehat{P'C'})=\pi-\beta-\gamma$. [S]
4. En déduire que $(B'\widehat{C'},\widehat{B'P'})=\beta$ et $(C'\widehat{P'},\widehat{C'B'})=\gamma$. [S]
5. Conclure. [S]

## III. La preuve de Nikos Dergiades (1991)

Comme dans la partie précédente, on se donne le triangle équilatéral $P'Q'R'$ d'arête $a$ et on définit les réels $\alpha, \beta, \gamma$ strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, tels que $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$.

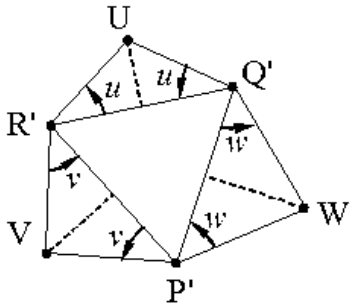
Pour simplifier les notations, on note :

$u=\frac{\pi}{3}-\alpha$, $v=\frac{\pi}{3}-\beta$ et $w=\frac{\pi}{3}-\gamma$.

Sur chacun des cotés du triangle $P'Q'R'$, et vers l'extérieur, on mène des triangles isocèles, dont les angles à la base sont respectivement égaux à $u, v, w$ (voir figure ci-contre.)

On note ensuite :

$A'=(VR')\cap(WQ')$, $B'=(UR')\cap(WP')$, $C'=(VP')\cap(UQ')$.




1. Montrer que la droite $UP'$ est la bissectrice intérieure issue de $U$ au triangle $UB'C'$. [S].
2. Montrer que $(P'\widehat{B'},\widehat{P'C'})=\frac{1}{2}\left(\pi+(U\widehat{B'},\widehat{UC'})\right)$ [S]
3. On note $I$ le centre du cercle inscrit au triangle $UB'C'$.
   Montrer que $(I\widehat{B'},\widehat{IC'})=\frac{1}{2}\left(\pi+(U\widehat{B'},\widehat{UC'})\right)$ et en déduire $P'=I$. [S]
4. Prouver alors que les droites $(B'P')$, $(B'R')$, $(C'Q')$, $(C'P')$, $(A'R')$ et $(A'Q')$ sont les trisectrices intérieures du triangle $A'B'C'$. [S]
5. Montrer que $(A'\widehat{B'},\widehat{A'C'})=3\alpha$, $(B'\widehat{C'},\widehat{B'A'})=3\beta$, $(C'\widehat{A'},\widehat{C'B'})=3\gamma$ et conclure. [S]



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

## IV. La preuve d'Alain Connes (1998)

On identifie le plan affine euclidien orienté avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On identifie toute application $f$ du plan dans lui-même avec l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe $z$ d'un point quelconque $M$ associe l'affixe $Z$ du point-image $f(M)$.

Comme indiqué au début de l'énoncé, on se donne le triangle $ABC$ et les points $P, Q, R$.

On note $\widehat{a} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\widehat{b} = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $\widehat{c} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Soit $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ les rotations de centres respectifs $A, B, C$ et d'angles $\theta_1 = \frac{2\widehat{a}}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\widehat{b}}{3}$, $\theta_3 = \frac{2\widehat{c}}{3}$.

Pour tout $z$ de $\mathbb{C}$, on pose $\rho_1(z) = a_1 z + b_1$, $\rho_2(z) = a_2 z + b_2$, $\rho_3(z) = a_3 z + b_3$.

Pour simplifier les notations, on pose $\omega = a_1 a_2 a_3$.

1. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ (resp. $\rho_2 \circ \rho_3$, $\rho_3 \circ \rho_1$) est une rotation de centre $R$ (resp. $P$, $Q$). [S]
2. En déduire les affixes $p, q, r$ de $P, Q, R$, en fonction de $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. [S]
3. Par un argument géométrique, montrer que $\rho_1^3 \circ \rho_2^3 \circ \rho_3^3 = \mathrm{Id}$ (application identité). [S]
4. En déduire $\begin{cases} \omega \in \{j, j^2\} \\ (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3 a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3 = 0 \end{cases}$ [S]
5. On pose $E = -\omega\, a_1^2 a_2 (a_1 - \omega)(a_2 - \omega)(a_3 - \omega)(p + \omega q + \omega^2 r)$.
   En utilisant les expressions de $p, q, r$, et le fait que $\omega$ est dans $\{j, j^2\}$, développer et simplifier l'expression $E$, pour obtenir finalement $E = 0$. [S]
6. En déduire $p + \omega q + \omega^2 r = 0$, et montrer que $PQR$ est un triangle équilatéral. [S]


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.