- PROBLEME DE MECANIQUE DU POINT 2 -

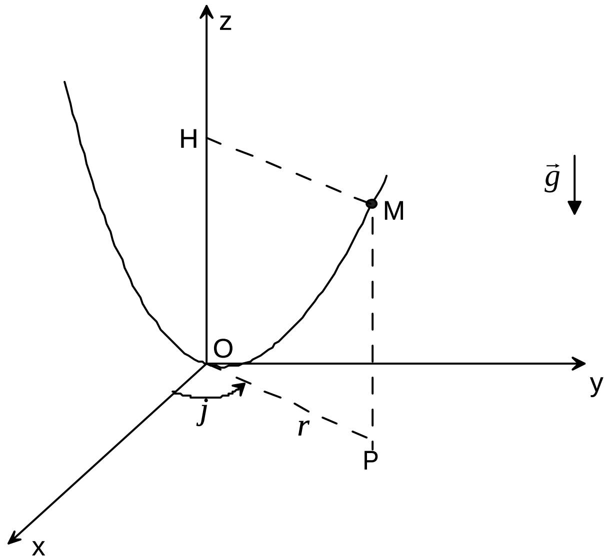
• **ENONCE :** « Particule dans une cuvette parabolique »

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\Re(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ supposé galiléen.

La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution (*P*), d'axe vertical ascendant *Oz*, dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, j, z) est : $r^2 = az \quad (a \succ 0)$

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur (*P*) ; on suppose en outre la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées r et z de M satisfont à l'inégalité : $z \geq r^2 / a$.

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant celle de $\Re_c(O,\vec{e}_r,\vec{e}_j,\vec{e}_z)$.



I. Moment cinétique

1.1) Exprimer, dans la base de $\Re_c$, la vitesse de M par rapport à $\Re$.

1.2) Quelle est l'expression, dans la base de $\Re_c$, du moment cinétique en O, $\vec{L}_o$, par rapport à $\Re$? En déduire sa projection selon l'axe *Oz* .

1.3) Montrer que la réaction $\vec{R}$ qu'exerce le paraboloïde (*P*) sur M est contenue dans le plan OHM. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection de $\vec{L}_o$ sur *Oz* se conserve au cours du temps.
Expliciter cette relation de conservation en fonction de r et j ; dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

II. Energie

2.1) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_c de la particule M par rapport à $\Re$?

2.2) Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_p dont dérivent les forces extérieures agissant sur M. Exprimer E_p en fonction de r en supposant que $E_p(0)=0$.

2.3) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

III. Discussion générale du mouvement

3.1) Déduire de ce qui précède une équation différentielle du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \times G(r)+E_{pef}(r)=E_m$$

où $G(r)$ est positif, sans dimension et où $E_{pef}(r)$ est une énergie potentielle effective.

Expliciter $G(r)$ et $E_{pef}(r)$.

3.2) Représenter avec soin le graphe $E_{pef}(r)$; monter que $E_{pef}(r)$ passe par un minimum pour une valeur r_m de r que l'on exprimera en fonction de L, m, a et g, intensité du champ de pesanteur.

3.3) Discuter, à l'aide du graphe $E_{pef}(r)$ la nature du mouvement de M ; en déduire que la trajectoire de M sur le paraboloïde (*P*) est nécessairement tracée sur une région de (*P*) limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème : on se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

IV. Etude de quelques mouvements particuliers

4.1) A quelle condition sur L la trajectoire de M sur (*P*) est-elle une parabole méridienne ?

4.2) Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur (*P*) soit un cercle horizontal.

4.3) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée r de la valeur r_m pour laquelle $E_{pef}(r)$ est minimale ; montrer que $e=r-r_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $r_m=1\ m$ et $a=2\ m$.

On prendra $g=9{,}81\ m.s^{-2}$.

4.4) L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement ; commenter à l'aide du graphe $E_{pef}(r)$

Rq : ce problème est la première partie de l'épreuve de Physique 1 du concours CCP-MP 99
(partie à faire en 2 heures)

****