

- PROBLEME DE MECANIQUE DU POINT 2 -

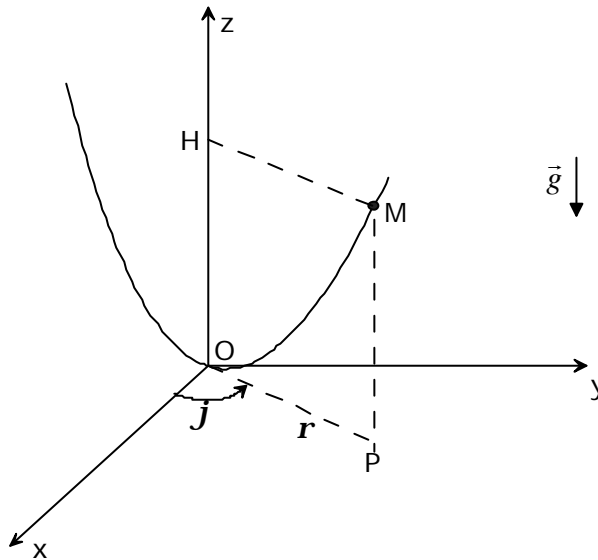
• **ENONCE :** « Particule dans une cuvette parabolique »

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur \vec{g} , à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathfrak{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

La surface extérieure de cette cavité est un parabolôïde de révolution (P), d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques (r, j, z) est : $r^2 = az$ ($a > 0$)

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur (P) ; on suppose en outre la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées r et z de M satisfont à l'inégalité : $z \geq r^2 / a$.

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant celle de $\mathfrak{R}_c(O, \vec{e}_r, \vec{e}_j, \vec{e}_z)$.



I. Moment cinétique

1.1) Exprimer, dans la base de \mathfrak{R}_c , la vitesse de M par rapport à \mathfrak{R} .

1.2) Quelle est l'expression, dans la base de \mathfrak{R}_c , du moment cinétique en O, \vec{L}_O , par rapport à \mathfrak{R} ? En déduire sa projection selon l'axe Oz.

1.3) Montrer que la réaction \vec{R} qu'exerce le parabolôïde (P) sur M est contenue dans le plan OHM. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, sous forme vectorielle, montrer que la projection de \vec{L}_O sur Oz se conserve au cours du temps.

Expliciter cette relation de conservation en fonction de r et j ; dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

**II. Energie**

2.1) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_c de la particule M par rapport à \mathfrak{R} ?

2.2) Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_p dont dérivent les forces extérieures agissant sur M. Exprimer E_p en fonction de \mathbf{r} en supposant que $E_p(0) = 0$.

2.3) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

III. Discussion générale du mouvement

3.1) Dédurre de ce qui précède une équation différentielle du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 \times G(\mathbf{r}) + E_{pef}(\mathbf{r}) = E_m$$

où $G(\mathbf{r})$ est positif, sans dimension et où $E_{pef}(\mathbf{r})$ est une énergie potentielle effective.

Expliciter $G(\mathbf{r})$ et $E_{pef}(\mathbf{r})$.

3.2) Représenter avec soin le graphe $E_{pef}(\mathbf{r})$; montrer que $E_{pef}(\mathbf{r})$ passe par un minimum pour une valeur \mathbf{r}_m de \mathbf{r} que l'on exprimera en fonction de L, m, a et g , intensité du champ de pesanteur.

3.3) Discuter, à l'aide du graphe $E_{pef}(\mathbf{r})$ la nature du mouvement de M; en déduire que la trajectoire de M sur le paraboloïde (\mathcal{P}) est nécessairement tracée sur une région de (\mathcal{P}) limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème : on se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

IV. Etude de quelques mouvements particuliers

4.1) A quelle condition sur L la trajectoire de M sur (\mathcal{P}) est-elle une parabole méridienne ?

4.2) Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur (\mathcal{P}) soit un cercle horizontal.

4.3) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée \mathbf{r} de la valeur \mathbf{r}_m pour laquelle $E_{pef}(\mathbf{r})$ est minimale; montrer que $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $\mathbf{r}_m = 1\text{ m}$ et $a = 2\text{ m}$.

On prendra $g = 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

4.4) L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement; commenter à l'aide du graphe $E_{pef}(\mathbf{r})$

Rq : ce problème est la première partie de l'épreuve de Physique 1 du concours CCP-MP 99 (partie à faire en 2 heures)
