ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–1

1) a) Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les quatre matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de E, appelée base canonique. Quelle est la dimension de E ?

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application φ de E dans E définie par :

$$\forall M \in E,\ \varphi(M) = A \times M.$$

Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et donner la matrice B de φ dans la base canonique de E.

2) a) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et que φ est un automorphisme de E.

b) On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas inversible et que φ n'est pas un automorphisme de E.

3) Dans le cas général, montrer que (A inversible) $\Longleftrightarrow$ (B inversible).

4) a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A et vérifier que toute valeur propre de A est valeur propre de B. A est-elle diagonalisable ? B est-elle diagonalisable ?

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer les valeurs propres de A et montrer qu'elles sont valeurs propres de B. B est-elle diagonalisable ?

5) Revenons au cas général :

a) Soit λ une valeur propre de A et $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de B et donner deux vecteurs propres associés et linéairement indépendants.

b) Montrer que A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ B diagonalisable.

Ind : on pourra montrer que B et A ont les mêmes valeurs propres.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

a)

Les matrices E_i $1 \leq i \leq 4$, sont dans E.

$$\forall M \in E,\ \exists\,!(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ /\ M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3 + tE_4.$$

Toute matrice de E se décompose de manière unique en une combinaison linéaire des E_i, donc la famille $(E_1, \ldots, E_4)$ est une base de E.

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.}$$

b)

φ est une application de E dans E ; de plus

$$\begin{aligned} \forall (M,N) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) = A(\lambda M) + AN \\ &= \lambda AM + AN = \lambda\varphi(M) + \varphi(N), \end{aligned}$$

d'après les règles de calcul sur les matrices.

φ est un endomorphisme de E.

- Matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$.

Notons B cette matrice : $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, car dimension de $E = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Il s'agit d'exprimer, par définition, $\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_3)$ et $\varphi(E_4)$ en fonction de E_1, E_2, E_3 et E_4.

$$\begin{aligned} \varphi(E_1) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\ \varphi(E_2) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = cE_1 + dE_2 + 0E_3 + 0E_4 \\ \varphi(E_3) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + bE_4 \\ \varphi(E_4) &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + cE_3 + dE_4 \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix}.$$

QUESTION–2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A est inversible car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

Pour montrer que φ est un automorphisme de E, montrons que sa matrice B est inversible.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.