



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGEBRE LINEAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-2

#### Partie-A

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $\varphi$  l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = Q \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x)).$$

- 1) Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Donner la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base canonique de  $E$ .
- 2) Etudier la diagonalisation de  $M$ .
- 3) Calculer  $(M - I)^2$  et  $(M - I)^3$  où  $I$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .  
En déduire l'expression de  $M^n$  en fonction de  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4)  $M$  est-elle inversible ?

#### Partie-B

On suppose désormais que  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $\varphi$  gardant la même signification.

- 1) Vérifier que  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .
- 2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\varphi(P_n)$  où  $P_n$  est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = x^n.$$

- 3) Montrer que : 
$$\begin{cases} \deg(P) = k, k \in \mathbb{N} \implies \deg(\varphi(P)) = k. \\ \varphi \text{ injectif} \\ \varphi \text{ bijectif.} \end{cases}$$

- 4) Soit  $C_n$  le polynôme défini par :  $\forall x \in \mathbb{R}, C_n(x) = \frac{x^n}{n!}$  et  $D_n$  son antécédent par  $\varphi$ .

- a) Montrer que  $D_n' = D_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- b) On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(x) = D_n(1 - x)$ .

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \varphi(D_n)(-x)$ .

- c) En conclure que  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi((-1)^n D_n) = \varphi(P)$ .

Déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, D_n(1 - x) = (-1)^n D_n(x)$ .

**CORRIGE DE L'EXERCICE**
**CORRIGE :**
**Partie-A**
**QUESTION-1**


---

$Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , car  $P$  et  $x \mapsto P(x+1)$  sont dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $(P, P_1) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda P_1)(x) &= \frac{1}{2} \left( P(x+1) + \lambda P_1(x+1) + P(x) + \lambda P_1(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( P(x+1) + P(x) \right) + \lambda \frac{1}{2} \left( P_1(x+1) + P_1(x) \right) \\ &= \varphi(P)(x) + \lambda \varphi(P_1)(x) = (\varphi(P) + \lambda \varphi(P_1))(x) \end{aligned}$$

Ce qui veut dire  $\varphi(P + \lambda P_1) = \varphi(P) + \lambda \varphi(P_1)$ , soit  $\varphi$  est linéaire.

$\varphi \in \mathcal{L}(E).$

Matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $E$  :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(P_0)(x) = \frac{1}{2}(P_0(x+1) + P_0(x)) = \frac{1}{2}(1+1) = P_0(x). \text{ Donc } \varphi(P_0) = P_0.$$

$$\varphi(P_1)(x) = \frac{1}{2}((x+1) + x) = x + \frac{1}{2} = P_1(x) + \frac{1}{2}P_0(x). \text{ Donc } \varphi(P_1) = P_1 + \frac{1}{2}P_0.$$

$$\varphi(P_2)(x) = \frac{1}{2}((x+1)^2 + x^2) = x^2 + x + \frac{1}{2} = P_2(x) + P_1(x) + \frac{1}{2}P_0(x). \text{ Donc}$$

$$\varphi(P_2) = P_2 + P_1 + \frac{1}{2}P_0.$$

La matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base canonique  $(P_0, P_1, P_2)$  est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**QUESTION-2**


---

La matrice  $M$  est triangulaire, sa seule valeur propre est  $\lambda = 1$ .

**Raisonnons par l'absurde :** Si  $M$  est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale, sur la diagonale de laquelle il y a la valeur propre 1 ; cette matrice diagonale est  $I$ . Il existe donc une matrice  $P \in M_3(\mathbb{R})$ , inversible, telle que  $M = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ .

Comme  $M \neq I_3$ , on conclut que

 **$M$  n'est pas diagonalisable**
**QUESTION-3**


---

$$(M - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (M - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (M - I)^3 = (0).$$