ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−4

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère l'application f qui à toute matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $f(X) = AXB$.

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) On pose $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Calculer $f(X)$.

3) Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner la matrice B de f dans cette base.

4) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?