ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–6

E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f \circ f \circ f = \omega$ et $f^2 = f \circ f \neq \omega$, où ω est l'endomorphisme nul. On note Id l'application identique de E.

1) Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$, montrer que $\dim \operatorname{Ker} f^2 \neq 3$, puis montrer que $(\dim \operatorname{Ker} f = 2) \Longrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer qu'alors $f^2 = \omega$.

En déduire les dimensions respectives de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2) Soit $a \notin \operatorname{Ker} f^2$ (on justifiera l'existence d'un tel vecteur). Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de E. Déterminer la matrice M de f dans cette base. Que peut-on dire des dimensions de $\operatorname{Ker} f^2$ et de $\operatorname{Im} f^2$?

3) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) Montrer que $\mathrm{Id} + f$ est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque $(\mathrm{Id} + f)^{-1}$.

5) Dans cette question $E = \mathbb{R}_2[X]$ et D désigne l'application dérivation. Vérifier que l'on est bien dans les conditions initiales de l'exercice et déterminer $(\mathrm{Id} + D)^{-1}$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) on trouve $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

2) on trouve $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.