



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-6

E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f \circ f \circ f = \omega$ et $f^2 = f \circ f \neq \omega$, où ω est l'endomorphisme nul. On note Id l'application identique de E .

1) Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$, montrer que $\dim \text{Ker } f^2 \neq 3$, puis montrer que $(\dim \text{Ker } f = 2) \implies \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Montrer qu'alors $f^2 = \omega$.

En déduire les dimensions respectives de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

2) Soit $a \notin \text{Ker } f^2$ (on justifiera l'existence d'un tel vecteur). Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de E . Déterminer la matrice M de f dans cette base. Que peut-on dire des dimensions de $\text{Ker } f^2$ et de $\text{Im } f^2$?

3) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) Montrer que $\text{Id} + f$ est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque $(\text{Id} + f)^{-1}$.

5) Dans cette question $E = \mathbb{R}_2[X]$ et D désigne l'application dérivation. Vérifier que l'on est bien dans les conditions initiales de l'exercice et déterminer $(\text{Id} + D)^{-1}$.

INDICATIONS DE SOLUTION

- 1) on trouve $\dim \text{Ker } f = 1$
- 2) on trouve $\dim \text{Ker } f = 2$