



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

**ÉNONCÉ :**

**ÉNONCÉ-8**

On considère le sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  défini par :

$$\mathcal{M} = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ t & 1+t & 0 \\ t & -t & 1+2t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1) Montrer que  $\mathcal{M}$  est stable par produit matriciel.
- 2) Déterminer les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $A(t)$  est inversible.
- 3) On note  $\mathcal{M}_1 = \left\{ A(t) \in \mathcal{M} / t \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$ .

Montrer que  $\mathcal{M}_1$  est un groupe multiplicatif, c'est-à-dire :

$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_1)^2$ ,  $AB \in \mathcal{M}_1$  ; la matrice unité est dans  $\mathcal{M}_1$  ;  $\forall A \in \mathcal{M}_1$ ,  $A$  est inversible et son inverse est dans  $\mathcal{M}_1$ .

L'associativité n'est pas à montrer, elle est acquise.

- 4) Résoudre dans  $\mathcal{M}$  l'équation :  $X^2 = A(1)$ .
- 5) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $B = A(x_0)$ . Calculer  $B^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION