



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-14

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier naturel $p \geq 2$ tel que :

$$u^p = \omega \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq \omega \quad \text{où } \omega \text{ est l'endomorphisme nul de } E.$$

- 1) Montrer que 0 est la seule valeur propre de u .
- 2) a) Montrer qu'il existe $a \in E / u^{p-1}(a) \neq 0$.
b) Montrer que la famille $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre.
- 3) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = \text{Id} + u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)}$.

Montrer que v est un automorphisme de E .

(On pourra montrer que si $x \in \text{Ker } v$, $u^{p-1}(x) = 0$, puis $u^{p-2}(x) = 0$, etc...).

- 4) a) Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(v - \text{Id})$.
b) Montrer que $\text{Ker}(v - \text{Id}) \subset \text{Ker } u$.
- 5) Dédurre de la question précédente que 1 est la seule valeur propre de v .