ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−14

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier naturel $p \geq 2$ tel que :

$$u^p = \omega \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq \omega \quad \text{où } \omega \text{ est l'endomorphisme nul de } E.$$

1) Montrer que 0 est la seule valeur propre de u.

2) a) Montrer qu'il existe $a \in E \ / \ u^{p-1}(a) \neq 0$.

b) Montrer que la famille$(a, u(a), \dots u^{p-1}(a))$ est libre.

3) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = \mathrm{Id} + u + \dfrac{u^2}{2} + \dots + \dfrac{u^{p-1}}{(p-1)}$.

Montrer que v est un automorphisme de E.

(On pourra montrer que si $x \in \operatorname{Ker} v$, $u^{p-1}(x) = 0$, puis $u^{p-2}(x) = 0$, etc...).

4) a) Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id})$.

b) Montrer que $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} u$.

5) Déduire de la question précédente que 1 est la seule valeur propre de v.