ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = (0)$ et $A^{p-1} \neq (0)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

0) a) Montrer que :

a) $\mathrm{Ker}\, f^0 \subset \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \dots \mathrm{Ker}\, f^n \subset \mathrm{Ker}\, f^{n+1} \dots$

b) Montrer, en considérant les dimensions de $\mathrm{Ker}\, f^p$ pour $p \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.

1) Montrer que $p \leq n \Longrightarrow A^n = (0)$.

2) Revenons au cas général.

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul e tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.

b) En déduire que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est une famille libre de E.

c) Conclure que $A^n = (0)$.

3) On suppose dorénavant que $p = n - 1$.

a) En utilisant les résultats de la première question de l'exercice−10, déduire que :

$$1 \leq \dim \mathrm{Ker}\, f \leq \cdots \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1} \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^n \leq n - 1.$$

b) Montrer que

$$1 \leq \dim \mathrm{Ker}\, f < \cdots < \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1} \leq n - 1.$$

c) Conclure que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \dim \mathrm{Ker}\, f^k = k.$$

4) Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{Im}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{n-k}$.

En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{n-k}$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE