



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

#### ENONCE-16

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non nulle. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $p$  tel que  $A^p = (0)$  et  $A^{p-1} \neq (0)$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ .

0) a) Montrer que :

$$\text{a) } \text{Ker } f^0 \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots \subset \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1} \dots$$

b) Montrer, en considérant les dimensions de  $\text{Ker } f^p$  pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , qu'il existe un entier  $0 \leq k \leq n$  tel que  $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$ .

1) Montrer que  $p \leq n \implies A^n = (0)$ .

2) Revenons au cas général.

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $e$  tel que  $f^{p-1}(e) \neq 0$ .

b) En déduire que la famille  $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$  est une famille libre de  $E$ .

c) Conclure que  $A^n = (0)$ .

3) On suppose dorénavant que  $p = n - 1$ .

a) En utilisant les résultats de la première question de l'exercice-10, déduire que :

$$1 \leq \dim \text{Ker } f \leq \dots \leq \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq \dim \text{Ker } f^n \leq n - 1.$$

b) Montrer que

$$1 \leq \dim \text{Ker } f < \dots < \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq n - 1.$$

c) Conclure que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim \text{Ker } f^k = k.$$

4) Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Im } f^k \subset \text{Ker } f^{n-k}$ .

En déduire que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Im } f^k = \text{Ker } f^{n-k}$ .