



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE
ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-17

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = Q / \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x + 1) - P(x).$$

On notera Θ le polynôme nul.

- 1) φ est-il un automorphisme de E ?
- 2) Pour $k \in [2, n]$, on définit le polynôme P_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_k(x) = \frac{x(x - 1) \dots (x - k + 1)}{k!}$$

et on pose $\forall x \in \mathbb{R}, P_0(x) = 1$, et $P_1(x) = x$.

- a) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E .
- b) Ecrire la matrice de φ dans cette base.
- c) Montrer que :

$$\forall P \in E, P = \sum_{k=0}^n (\varphi^k(P))(0)P_k, \quad \text{où } \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}.$$

- d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?