ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–17

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = Q \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

On notera Θ le polynôme nul.

1) φ est-il un automorphisme de E ?

2) Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on définit le polynôme P_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

et on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 1,$ et $P_1(x) = x.$

a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est une base de E.

b) Ecrire la matrice de φ dans cette base.

c) Montrer que :

$$\forall P \in E,\ P = \sum_{k=0}^{n} (\varphi^k(P))(0) P_k, \quad \text{où} \quad \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k\,fois}.$$

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.