



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGEBRE LINEAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

#### ENONCE-18

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On note  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note  $u$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^4$  représenté par  $A$  dans la base canonique :  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

1) Dans cette question, il s'agit de déterminer, selon  $(a, b)$ ,  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  ; en donner leurs dimensions, en fonction de  $a$  et  $b$ .

a) Etudier le cas  $a = b = 0$ .

b) Soit  $a = 0$  et  $b \neq 0$ . Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3).$$

c) Soit  $a \neq 0$  et  $b = 0$ . Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2, e_3).$$

d) Soit  $ab \neq 0$ . Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2 - e_3).$$

2)  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont-ils supplémentaires ? discuter selon  $(a, b)$ .

3) Dans cette question il s'agit de déterminer les valeurs propres de  $u$ .

a) Etudier le cas  $a = b = 0$ .

b) Soit  $a = 0$  et  $b \neq 0$ . Comparer  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  ; en déduire la seule valeur propre de  $u$ .

c) Soit  $a \neq 0$  et  $b = 0$ . Calculer  $u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$  et déterminer les valeurs propres de  $u$ .

d) Soit  $ab \neq 0$ .

- Montrer que  $\lambda \neq 0$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si

$$-\lambda^2 + 2a\lambda + 4ab = 0.$$

- En déduire, selon  $(a, b)$  les valeurs propres de  $u$ .

4) Dans cette question il s'agit d'étudier la diagonalisation de  $u$ .

a) Répondre à la question dans les trois premiers cas.

b) Soit  $ab \neq 0$ .

- Montrer que si  $a = -4b$ ,  $u$  n'est pas diagonalisable.

- Soit  $a(a + 4b) > 0$ . Montrer (sans les calculer) que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres non nulles sont de dimension 1.

En déduire que  $u$  est diagonalisable.

**CORRIGE DE L'EXERCICE**
**CORRIGE :**
**QUESTION-1**

Rappelons que, dans tous les cas,  $\text{Im } u = \text{vect}(u(e_1), \dots, u(e_4))$ .

Dans le cas présent :  $\text{Im } u = \text{vect}(a(e_1 + \dots + e_4), b(e_1 + e_4))$ .

a)  $a = b = 0$ .

Alors  $u$  est l'endomorphisme nul, donc

Dans le cas où  $a = b = 0$  :

$\text{Im } u = \{0_E\}$ ,  $\text{Ker } u = E$  ;  $\dim \text{Im } u = 0$  et  
 $\dim \text{Ker } u = 4$ .

b)  $a = 0, b \neq 0$ .

Alors  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$ .

$\text{Im } u = \text{vect}(b(e_1 + e_4)) = \text{vect}(e_1 + e_4)$ , car  $b \neq 0$ . La dimension de  $\text{Im } u = 1$ .

**Le théorème du rang donne**  $\dim \text{Ker } u = 3$ . Pour déterminer  $\text{Ker } u$ , il suffit d'y trouver une famille libre de trois vecteurs.

Il est à peu près clair, en regardant bien la matrice  $A$  que :

$$u(e_1) = u(e_4) = 0. \text{ De plus, } u(e_2) = u(e_3), \text{ donc } u(e_2 - e_3) = 0.$$

La famille  $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$  est une famille de  $\text{Ker } u$ . Regardons si elle est libre.

$$\text{Considérons } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xe_1 + ye_4 + z(e_2 - e_3) = 0. \quad (1)$$

La relation (1) équivaut à :  $xe_1 + ze_2 - ze_3 + ye_4 = 0$ .

Comme  $(e_1, \dots, e_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ , cela impose  $x = y = z = 0$ .

**Conclusion : La famille  $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$  est une base de  $\text{Ker } u$ , car c'est une famille libre de trois vecteurs d'un espace de dimension trois.**

Dans le cas où  $a = 0$  et  $b \neq 0$  :

$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_4)$ ,  $\dim \text{Im } u = 1$  et  
 $\text{Ker } u = \text{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3)$  et  $\dim \text{Ker } u = 3$ .

c)  $a \neq 0, b = 0$ .

Alors  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .