



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-18

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On note $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique : (e_1, e_2, e_3, e_4) .

1) Dans cette question, il s'agit de déterminer, selon (a, b) , $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$; en donner leurs dimensions, en fonction de a et b .

a) Étudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3).$$

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2, e_3).$$

d) Soit $ab \neq 0$. Montrer que

$$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \text{Ker } u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2 - e_3).$$

2) $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont-ils supplémentaires ? discuter selon (a, b) .

3) Dans cette question il s'agit de déterminer les valeurs propres de u .

a) Étudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Comparer $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$; en déduire la seule valeur propre de u .

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Calculer $u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ et déterminer les valeurs propres de u .

d) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que $\lambda \neq 0$ est valeur propre de u si et seulement si

$$-\lambda^2 + 2a\lambda + 4ab = 0.$$

- En déduire, selon (a, b) les valeurs propres de u .

4) Dans cette question il s'agit d'étudier la diagonalisation de u .

a) Répondre à la question dans les trois premiers cas.

b) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que si $a = -4b$, u n'est pas diagonalisable.

- Soit $a(a + 4b) > 0$. Montrer (sans les calculer) que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres non nulles sont de dimension 1.

En déduire que u est diagonalisable.

CORRIGE DE L'EXERCICE
CORRIGE :
QUESTION-1

Rappelons que, dans tous les cas, $\text{Im } u = \text{vect}(u(e_1), \dots, u(e_4))$.

Dans le cas présent : $\text{Im } u = \text{vect}(a(e_1 + \dots + e_4), b(e_1 + e_4))$.

a) $a = b = 0$.

Alors u est l'endomorphisme nul, donc

Dans le cas où $a = b = 0$:

$\text{Im } u = \{0_E\}$, $\text{Ker } u = E$; $\dim \text{Im } u = 0$ et
 $\dim \text{Ker } u = 4$.

b) $a = 0, b \neq 0$.

Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$.

$\text{Im } u = \text{vect}(b(e_1 + e_4)) = \text{vect}(e_1 + e_4)$, car $b \neq 0$. La dimension de $\text{Im } u = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } u = 3$. Pour déterminer $\text{Ker } u$, il suffit d'y trouver une famille libre de trois vecteurs.

Il est à peu près clair, en regardant bien la matrice A que :

$$u(e_1) = u(e_4) = 0. \text{ De plus, } u(e_2) = u(e_3), \text{ donc } u(e_2 - e_3) = 0.$$

La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ est une famille de $\text{Ker } u$. Regardons si elle est libre.

$$\text{Considérons } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xe_1 + ye_4 + z(e_2 - e_3) = 0. \quad (1)$$

La relation (1) équivaut à : $xe_1 + ze_2 - ze_3 + ye_4 = 0$.

Comme (e_1, \dots, e_4) est une base de \mathbb{R}^4 , cela impose $x = y = z = 0$.

Conclusion : La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ est une base de $\text{Ker } u$, car c'est une famille libre de trois vecteurs d'un espace de dimension trois.

Dans le cas où $a = 0$ et $b \neq 0$:

$\text{Im } u = \text{vect}(e_1 + e_4)$, $\dim \text{Im } u = 1$ et
 $\text{Ker } u = \text{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ et $\dim \text{Ker } u = 3$.

c) $a \neq 0, b = 0$.

Alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.