ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–18

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On note $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique : (e_1, e_2, e_2, e_4).

1) Dans cette question, il s'agit de déterminer, selon (a,b), $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$; en donner leurs dimensions, en fonction de a et b.

a) Etudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \text{vect}(e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \text{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3).$$

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2, e_3).$$

d) Soit $ab \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \text{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \text{vect}(e_1 - e_4, e_2 - e_3).$$

2) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont-ils supplémentaires ? discuter selon (a,b).

3) Dans cette question il s'agit de déterminer les valeurs propres de u.

a) Etudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Comparer $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$; en déduire la seule valeur propre de u.

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Calculer $u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ et déterminer les valeurs propres de u.

d) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que $\lambda \neq 0$ est valeur propre de u si et seulement si

$$-\lambda^2 + 2a\lambda + 4ab = 0.$$

- En déduire, selon (a,b) les valeurs propres de u.

4) Dans cette question il s'agit d'étudier la diagonalisation de u.

a) Répondre à la question dans les trois premiers cas.

b) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que si $a = -4b$, u n'est pas diagonalisable.
- Soit $a(a+4b) > 0$. Montrer (sans les calculer) que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres non nulles sont de dimension 1.

En déduire que u est diagonalisable.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

Rappelons que, dans tous les cas, $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(u(e_1), \ldots, u(e_4))$.

Dans le cas présent : $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(a(e_1 + \cdots + e_4), b(e_1 + e_4))$.

a) $\boxed{a = b = 0.}$

Alors u est l'endomorphisme nul, donc

Dans le cas où $a = b = 0$:
$\operatorname{Im} u = \{0_E\}$, $\operatorname{Ker} u = E$; $\dim \operatorname{Im} u = 0$ et
$\dim \operatorname{Ker} u = 4$.

b) $\boxed{a = 0,\ b \neq 0.}$

Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(b(e_1 + e_4)) = \operatorname{vect}(e_1 + e_4)$, car $b \neq 0$. La dimension de $\operatorname{Im} u = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} u = 3$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} u$, il suffit d'y trouver une famille libre de trois vecteurs.

Il est à peu près clair, en regardant bien la matrice A que :

$u(e_1) = u(e_4) = 0$. De plus, $u(e_2) = u(e_3)$, donc $u(e_2 - e_3) = 0$.

La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ est une famille de $\operatorname{Ker} u$. Regardons si elle est libre.

Considérons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xe_1 + ye_4 + z(e_2 - e_3) = 0.$ **(1)**

La relation **(1)** équivaut à : $xe_1 + ze_2 - ze_3 + ye_4 = 0$.

Comme $(e_1, \ldots, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, cela impose $x = y = z = 0$.

Conclusion : La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ **est une base de** $\operatorname{Ker} u$, **car c'est une famille libre de trois vecteurs d'un espace de dimension trois.**

Dans le cas où $a = 0$ et $b \neq 0$:
$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1 + e_4)$, $\dim \operatorname{Im} u = 1$ et
$\operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ et $\dim \operatorname{Ker} u = 3$.

c) $\boxed{a \neq 0,\ b = 0.}$

Alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.