



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

#### ÉNONCÉ-20

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On appelle trace de  $A$  le nombre  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

1) a) Montrer que

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \text{ et} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A).$$

b) En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2) On suppose  $n = 2$ . Soit  $(u, v) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))^2$  vérifiant :

$$u \circ v - v \circ u = u. \quad (*)$$

a) Montrer que  $\exists \lambda \in \mathbb{R} / u \circ u = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  ; établir que  $\lambda = 0$ .

b) On suppose de plus que  $u \neq 0$ . Montrer que :

- $\dim \text{Ker } u = 1$ .
- $\text{Ker } u$  est stable par  $v$ .
- $v$  admet au moins une valeur propre réelle.