ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–21

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Pour $(i,j) \in ([\![1,3]\!])^2$, on considère la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les termes sont tous nuls, sauf celui de la i^{eme} ligne j^{eme} colonne qui vaut 1.

Montrer que la famille $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$ forme une base de E, appelée base canonique et notée $\mathcal{B}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f_A : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & XA. \end{array} \right.$

a) Vérifier que $f_A \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa matrice M dans $\mathcal{B}$.

b) Calculer la trace de M (la trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux).

On rappelle que la trace d'une matrice est indépendante de la base dans laquelle on écrit cette matrice : c'est la raison pour laquelle on dira aussi trace de l'endomorphisme associé et on la notera $\operatorname{tr} M$ ou $\operatorname{tr} f_A$.

3) Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et g_C : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & XC. \end{array} \right.$

a) Montrer que, si C est p-nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}^*$ / $C^p = (0)$) , il en est de même de g_C (c'est-à-dire $\underbrace{g_C \circ \cdots \circ g_C}_{\text{p fois}} = \omega$ où ω est

l'endomorphisme nul).

b) Déterminer la trace de g_C.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.