



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

#### ÉNONCÉ-22

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f \circ f = -id_E$ .

- 1) Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
- 2) Soit  $p \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ . On considère une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ ,  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ . On suppose que la famille  $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_{p-1}))$  est libre.

- a) Montrer que la famille  $f(e_1), \dots, f(e_{p-1}), f(e_p)$  est libre.
- b) Montrer qu'alors la famille  $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_{p-1}), f(e_p))$  est libre.

**Ind :** on pourra considérer une combinaison linéaire nulle des vecteurs  $e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_{p-1}), f(e_p)$  et envisager le cas où le coefficient de  $f(e_p)$  est nul, puis celui où il est non nul.

- 3) On suppose ici que la dimension de  $E$  vaut 6.

- a) Montrer qu'il existe un entier  $p > 0$  et  $p$  vecteurs  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  tels que la famille  $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$  soit une base de  $E$ , notée  $B$ .
- b) Quelle est la matrice  $M$  de  $f$  dans cette base  $B$  ?
- c) Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = -I_6$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION

Dans la question **2–b)**, dans le cas où le coefficient  $b_p$  de  $f(e_p)$  est non nul, appliquer  $f$  à la combinaison linéaire, puis faire disparaître  $e_p$  de cette dernière équation .