ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−23

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de E, qui a pour matrice A dans la base B.

1) a) l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

b) Déterminer 3 réels α, β, γ tels que : $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = (0)$ (où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (0) la matrice nulle) .

2) On pose $F = \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$ (Id est l'application identique de E).

a) Quelles sont les dimensions de F et de G ?

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.

c) En déduire que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.