



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-24

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 4 définie par :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- 2) On définit une suite  $(X_n) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  par :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$ , les suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(z_n)$  et  $(t_n)$  vérifiant les relations suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geq 0, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + z_n + t_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + y_n + t_n) \\ t_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + y_n + z_n). \end{cases}$$

- a) Déterminer une matrice  $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall n \geq 1$ ,  $X_n = BX_{n-1}$ .
- b) Étudier la convergence de la suite  $(X_n)$ , c'est-à-dire la convergence de chacun de ses termes.
- 3) Calculer  $B^2$ , puis montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que pour tout  $n$ , on ait :  $B^n = a_n B + b_n I$ .

Déterminer ces suites et retrouver les résultats de la question précédente.