ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–26

Soit φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. On notera D et D_1 les sous-espaces propres associés aux valeurs propres λ et λ_1 avec $\lambda > \lambda_1$.

2) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3) On rappelle qu'un sous-espace G est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\forall x \in G,\ f(x) \in G$.

a) Soit Δ une droite vectorielle (sous-espace de dimension 1) et e une base de Δ. Montrer que Δ est stable par φ si et seulement si $\varphi(e)$ appartient à Δ.

b) En déduire que les seules droites Δ stables par φ sont D et D_1.

4) On pose $i = (10, 15, 4),\ j = (1, 1, 1)$ et $k = (0, -\frac{1}{6}, 0)$.

a) Vérifier que la famille (i, j, k) est une base de E que l'on notera $\mathcal{B}_1$.

Soit $v = ai + bj + ck$ un vecteur de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (j, v) soit une famille libre de E.

b) On considère alors le plan vectoriel $P = \text{vect}(j, v)$ (on rappelle qu'un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension deux).

Montrer que $\varphi(v) \in P \iff a = 0$ ou $c = 0$.

c) En déduire que

$$\varphi(v) \in P \iff v = \underbrace{(a, b, 0)}_{v_1} \quad \text{ou} \quad v = \underbrace{(0, b, c)}_{v_2}.$$

d) Montrer alors que les seuls plans vectoriels $P = \text{vect}(j, v)$ stables par φ sont $P_1 = \text{vect}(i, j)$ et $P_2 = \text{vect}(j, k)$.

5) Vérifier que l'un de ces plans est $\text{Ker}(\varphi - 5\,\text{Id})^2$; on le notera F.

6) a) Montrer que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ n'est jamais égale à $\{0\}$.

b) Soit Q un plan stable par φ. Que peut-on dire de $Q \cap F$? En déduire tous les plans qui sont stables par φ.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.