ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−28

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 2$. Soit un réel a non nul donné. On admettra le résultat suivant :
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \qquad \textbf{(*)}$$

On considère un endomorphisme f de E vérifiant les propriétés suivantes :

- $f^{n-1} \neq 0$.
- $f^{n-1} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) = 0$.
- $f^{n-2} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) \neq 0$.

1) Montrer que 0 et a sont les seules valeurs propres de f.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\mathrm{Ker}\, f^k \cap \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}) = \{0\}.$$

b) Comparer $\mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$.
En déduire que $\dim \mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id}) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$, puis
$n \leq \dim \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$.

c) En utilisant la relation **(*)**, montrer que

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}\, f^{n-1} + \mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id})\Big) \geq n.$$

En déduire que $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$ et $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

3) Calculer $(f - a\,\mathrm{Id}) \circ f^{n-1}$.
En déduire que $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$ et $\mathrm{Im}\, f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE