ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–28

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 2$. Soit un réel a non nul donné. On admettra le résultat suivant :

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \qquad \textbf{(*)}$$

On considère un endomorphisme f de E vérifiant les propriétés suivantes :

- $f^{n-1} \neq 0$.
- $f^{n-1} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) = 0$.
- $f^{n-2} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) \neq 0$.

1) Montrer que 0 et a sont les seules valeurs propres de f.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\mathrm{Ker}\, f^k \cap \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}) = \{0\}.$$

b) Comparer $\mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$.

En déduire que $\dim \mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id}) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$, puis

$n \leq \dim \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}\, f^{n-1}$.

c) En utilisant la relation **(*)**, montrer que

$$\dim\Big(\mathrm{Ker}\, f^{n-1} + \mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id})\Big) \geq n.$$

En déduire que $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$ et $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E.

3) Calculer $(f - a\,\mathrm{Id}) \circ f^{n-1}$.

En déduire que $\mathrm{Ker}\, f^{n-1}$ et $\mathrm{Im}\, f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.