PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–22

Une urne contient n_1 boules blanches, n_2 boules noires et r boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher). n_1 et n_2 sont fixés dans tout l'exercice et $n = n_1 + n_2$ est strictement positif.

Un joueur tire au hasard une boule de l'urne : si elle est blanche, il a gagné la partie ; si elle est noire, il a perdu ; si elle est rouge, il ne la remet pas dans l'urne et fait un second tirage. La même règle s'applique aux tirages suivants (s'ils existent !). La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1) Quel est le nombre maximal de tirages pour une partie ?

2) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note G_r l'événement suivant :

‹‹ le joueur gagne sachant qu'il effectue ses tirages dans une urne qui contient initialement r boules rouges ›› et l'on note π_r sa probabilité.

a) Calculer π_0 et π_1.

b) Etablir une relation de récurrence de la forme

$\pi_r = a\pi_{r-1} + b$ entre π_r et π_{r-1} $(r \in \mathbb{N}^*)$, a et b étant des fonctions de n_1, n_2 et r.

c) En déduire l'expression de π_r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3) Soit X_r la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie se termine lorsqu'au départ il y a r boules rouges dans l'urne.

On note $m_r = E(X_r)$ et $p_r(k) = p(X_r = k)$, où $E(X_r)$ désigne l'espérance de X_r.

a) Trouver une relation entre $p_{r-1}(k-1)$ et $p_r(k)$ pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$.

b) Exprimer m_0, m_1, m_2 en fonction de n.

c) Etablir une relation de récurrence de la forme

$m_r = c.m_{r-1} + d$ entre m_r et m_{r-1} $(r \in \mathbb{N}^*)$, c et d étant des fonctions de n et de r

d) En déduire l'expression de m_r en fonction de n et de r.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 2−b) Utiliser le système complet d'événements $\{B_1, N_1, R_1\}$ pour trouver une relation entre G_r et G_{r-1}.

Question 3−c) Utiliser la relation du **a)** en n'oubliant pas qu'elle est valable pour $k \geq 2$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.