ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−10

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E. On rappelle que, par convention, $f^0 = \text{Id}$ où Id est l'application identique de E.

1) Montrer que :

a)

$$\text{Ker } f^0 \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \ldots \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1} \ldots$$

b)

$$\text{Im } f^0 \supset \text{Im } f \supset \text{Im } f^2 \supset \ldots \text{Im } f^n \supset \text{Im } f^{n+1} \ldots$$

2) On suppose dorénavant que $\dim E = n,\ n > 0$.

Montrer, on considérant les dimensions de $\text{Ker } f^p$ pour $p \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$.

En déduire qu'alors $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$.

3) Montrer que $\forall p \geq k,\ \text{Ker } f^p = \text{Ker } f^k$ et $\text{Im } f^p = \text{Im } f^k$.

4) a) Montrer que $\text{Ker } f^k \cap \text{Im } f^k = \{0_E\}$.

b) Établir que $\forall x \in E,\ f^k(x) \in \text{Im } f^{2k}$. En déduire que :

$$\forall x \in E,\ \exists z \in \text{Ker } f^k,\ \exists y \in E\ /\ x = f^k(y) + z.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

c) Retrouver ce résultat à partir de **a)** en utilisant le résultat suivant :

si F et G sont deux sous-espaces de E, alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

5) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A^4 = (0) \iff A^3 = (0)$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $u \in E$.

$u \in \operatorname{Ker} f^p$ veut dire que $f^p(u) = 0_E$; or $f^{p+1}(u) = f(f^p(u)) = f(0_E) = 0_E$ (**par linéarité**), donc $u \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$; cela montre que

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}.}$$

On applique cela pour $p = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ et on obtient le résultat.

Remarque : Pour $p = 0$, $f^0 = \operatorname{Id}$ et $\operatorname{Ker} f^0 = \{0_E\}$.

La démonstration précédente, appliquée à $p = 0$, donne le résultat suivant :

$\operatorname{Ker} f^0 \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui veut dire $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} f$.

Même si elle n'apporte pas grand chose de nouveau, cette dernière inclusion est vraie car elle veut dire que $0_E \in \operatorname{Ker} f$.

b)

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $v \in E$. $v \in \operatorname{Im} f^{p+1}$ veut dire qu'il existe un vecteur $u \in E \ / \ v = f^{p+1}(u)$; or $f^{p+1}(u) = f^p(f(u))$. Posons $t = f(u)$, alors $t \in E$ et $v = f^p(t)$: cela prouve que $v \in \operatorname{Im} f^p$. Donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f^{p+1} \subset \operatorname{Im} f^p.}$$

Remarque : Pour $p = 0$, $\operatorname{Im} f^0 = \operatorname{Im} \operatorname{Id} = E$. On obtient alors :

$\operatorname{Im} f \subset E$, ce qui est vrai car $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

On applique cela pour $p = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ et on obtient le résultat.

En résumé : pour tout entier k dans $\mathbb{N}$, on a

$\operatorname{Ker} f^0 \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \ldots$

$\operatorname{Im} f^0 \supset \operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \operatorname{Im} f^3 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} f^k \supset \operatorname{Im} f^{k+1} \supset \ldots$

QUESTION−2

- <u>Occupons-nous des noyaux.</u>

L'inclusion précédente implique l'inégalité $\dim \operatorname{Ker} f^k \leq \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

Posons $u_k = \dim \operatorname{Ker} f^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in [\![0, n]\!]$ (car $\operatorname{Ker} f^k \subset E$).

Remarquons que $u_0 = \dim \operatorname{Ker} f^0 = \dim\{0_E\} = 0$.

On a donc $0 = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_n \leq u_{n+1} \leq n$.

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_n \leq u_{n+1} \leq n.$$

Les $n + 2$ entiers $u_0, u_1, \ldots u_{n+1}$ sont dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$ (intervalle qui contient $n + 1$ entiers distincts), donc **nécessairement** deux d'entre eux au moins sont égaux ; ce qui se formule :