ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–12

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, $n+1$ réels distincts $(n \in \mathbb{N})$.

1) On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)).$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et donner sa matrice dans les bases canoniques des deux espaces vectoriels.

2) Soit $(R_0, R_1, \cdots R_n)$ une famille de polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que,

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg(R_k) = k$.

Montrer par récurrence sur n que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, notée $\mathcal{B}$.

3) Soit P un polynôme de degré n.

On considère la famille $(P, P', \frac{P''}{2!}, \cdots \frac{P^{(n)}}{n!})$.

a) Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, notée $\mathcal{B}_1$.

b) Soit P un polynôme de degré n. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, Q_k est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_k(x) = P(x + a_k).$$

- Montrer que les coordonnées de Q_k dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $(1, a_k, \ldots, a_k^n)$.
- Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourra utiliser : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

4) Soit P un polynôme de degré n. On considère les familles de nombres distincts suivantes : $(x_0, x_1, \cdots x_n)$ et $(y_0, y_1, \cdots y_n)$.

Montrer que la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, où $a_{i,j} = P(x_i + y_j)$ est inversible.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.