PHYSIQUE I

Sur le thème de la physique des bulles et des gouttes, l'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants d'importances inégales.

Partie I - Échanges entre une grosse bulle et une petite bulle

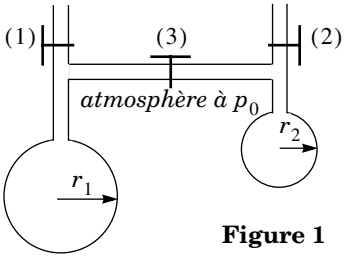


Figure 1

On considère le dispositif expérimental de la figure 1 : deux bulles sphériques d'eau savonneuse de rayons différents sont formées aux extrémités des deux tubes en soufflant, les robinets (1) et (2) étant ouverts et le robinet (3) fermé. Puis on ferme les robinets (1) et (2) et on ouvre le robinet (3) qui met en contact les deux bulles. On se propose d'étudier l'évolution des bulles.

Dans tout le problème on néglige le volume du tube de liaison entre les deux bulles. On étudie des évolutions quasi-statiques : dans chaque bulle on peut définir à chaque instant une température T_1 ou T_2 et une pression p_1 ou p_2 uniformes. Par ailleurs l'atmosphère impose une pression uniforme p_0 à l'extérieur des bulles. L'atmosphère se comporte comme un thermostat à la température T et on suppose l'équilibre thermique atteint à tout instant : $T_1 = T_2 = T$.

I.A - Loi de Laplace

Le robinet (3) étant fermé, proposer un dispositif simple réalisant un manomètre qui permette de mesurer la différence de pression $p_1 - p_0$ avec une règle graduée. L'expérience montre que les pressions sont données à l'équilibre par loi de Laplace :

$$p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_1} \text{ et } p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_2} \qquad \text{(A)}$$

où la constante positive σ est appelée coefficient de tension superficielle. Dans toute la suite, on suppose que l'équilibre mécanique entre chaque bulle et l'atmosphère est atteint de telle sorte que les relations (A) sont valables à tout instant.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

Filière PC

I.B - Approche qualitative

Préciser, en donnant un argument qualitatif s'appuyant sur les relations (A), l'évolution du système : le rayon des bulles évolue-t-il ? Est-ce la grosse bulle qui se « vide » dans la petite ? Est-ce le contraire ?

I.C - Approche quantitative

I.C.1) Rappeler la définition d'un potentiel thermodynamique.

I.C.2) Pour un système fermé, d'énergie interne U, d'entropie S et de volume V, en évolution monotherme (température extérieure T) et monobare (pression extérieure p_0), n'échangeant pas d'autre forme de travail avec l'extérieur que celui des forces de pression, justifier que $G^* = U - TS + p_0 V$ est un potentiel thermodynamique.

I.C.3) On néglige le volume d'air contenu dans le tube de liaison entre (1) et (2) et on étudie le système constitué :

- d'une part de l'air contenu dans les deux bulles et assimilé à un gaz parfait ; on note, avec $i = 1$ ou $i = 2$ selon le compartiment, V_i le volume, r_i le rayon, p_i la pression, N_i le nombre de moles d'air, S_i l'entropie de l'air ; la température T est commune aux deux compartiments ;
- d'autre part, des membranes d'eau savonneuse qui limitent les deux bulles, d'épaisseur négligeable, d'énergies internes respectives U_{mi}, de températures $T_{mi} = T$, d'entropies S_{mi} et de surfaces $\Sigma_{mi} = 8\pi r_i^2$ (double de la surface de la sphère, car il y a deux interfaces air-eau savonneuse), pour lesquelles l'identité thermodynamique fondamentale s'écrit $dU_{mi} = TdS_{mi} + \sigma d\Sigma_{mi}$.

a) Montrer que :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - TdS_1 - TdS_2 + p_0(dV_1 + dV_2) + \sigma d\Sigma_{m1} + \sigma d\Sigma_{m2}.$$

b) En déduire à l'aide des relations (A) que :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - TdS_1 - TdS_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2.$$

c) Soit $G_i = U_i - TS_i + p_i V_i$ l'enthalpie libre de l'air dans la bulle (i). Du fait que le nombre de moles N_i varie, l'identité thermodynamique fondamentale s'écrit :

$$dG_i = -S_i dT + V_i dp_i + \mu_i dN_i$$

où $\mu_i(p_i, T)$ est le potentiel chimique de l'air dans la bulle (i). Montrer que :

$$dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$$

t gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

d) On montre dans le cours de chimie que pour un gaz parfait : $\mu_i(p_i, T) = f(T) + RT\ln p_i$ où $f(T)$ est une fonction de la température, identique dans les deux bulles car le gaz est le même. En déduire que :

$$dG^* = RT\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)dN_1 \qquad \text{(B)}$$

I.C.4) Justifier que les variables p_1, p_2, r_1, r_2, N_1 et N_2 sont liées par 5 relations de telle sorte qu'une seule de ces variables suffit à déterminer toutes les autres. Dans la suite on prend r_1 comme variable. Montrer que $dp_i/dr_i < 0$ et $dN_i/dr_i > 0$. Quand r_1 croît, en déduire le sens de l'évolution de p_1, N_1, N_2, r_2, et p_2.

I.C.5) Prévoir l'évolution de deux bulles de rayons initiaux tels que $r_1 > r_2$. Que peut-on dire d'un état initial $r_1 = r_2$?

I.D - Transition entre deux comportements dans une expérience analogue

On se propose d'étudier le même problème en remplaçant les bulles de savon par deux petits ballons de baudruche que l'on supposera sphériques et réalisés dans le même matériau. On donne la loi phénoménologique qui relie la pression p_i de l'air dans un ballon à son rayon r_i :

$$p_i = p_0 + K\left(\frac{1}{r_i} - \frac{r_0^6}{r_i^7}\right) \qquad \text{(C)}$$

où r_0 est la plus petite valeur possible pour r_i, p_0 la pression extérieure et K une constante positive.

I.D.1) Le graphe de $p_i(r_i)$ est représenté sur la figure 2 ; il passe par un maximum p_m pour un rayon particulier r_m. Quelle conséquence pratique cela a-t-il quand on gonfle un ballon de baudruche ?

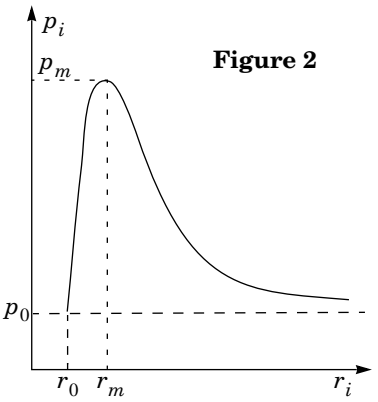


Figure 2

I.D.2) Les figures 3a et 3b fournissent le graphe de $dG^*/dr_1 = f(r_1)$ respectivement dans le cas (a) où $N = N_1 + N_2 > 8\pi r_m^3 p_m/3RT$ et dans le cas (b) où $N = N_1 + N_2 < 8\pi r_m^3 p_m/3RT$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

(la fonction $f(r_1)$ s'obtient en utilisant les relations (B) et (C), ce qu'on ne demande pas de faire). Les paramètres associés aux points remarquables de ces courbes ont les propriétés suivantes :

point A : $p_1(A) = p_2(A)$ et $r_1(A) \neq r_2(A)$

point B : $p_1(B) \neq p_2(B)$ et $r_1(B) \neq r_2(B)$

point C : $p_1(C) = p_2(C)$ et $r_1(C) = r_2(C)$

point D : $p_1(D) \neq p_2(D)$ et $r_1(D) \neq r_2(D)$

point E : $p_1(E) = p_2(A)$ et $p_2(E) = p_1(A)$; $r_1(E) = r_2(A)$; $r_2(E) = r_1(A)$

point F : $p_1(F) = p_2(F)$ et $r_1(F) = r_2(F)$

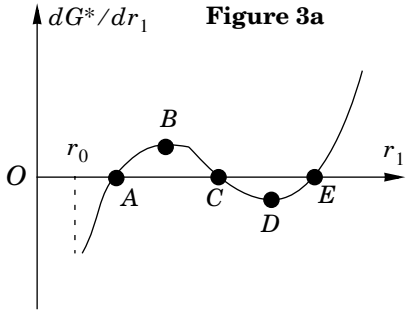


Figure 3a

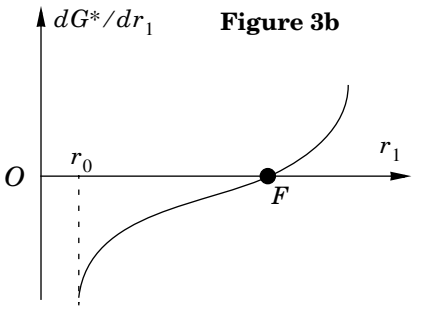


Figure 3b

a) Tracer l'allure du graphe de $G^*(r_1)$ d'une part dans le cas (a) et d'autre part dans le cas (b). On placera sur ces graphes les points remarquables A , B , C , D , E , F . On rappelle que $G^*(r_1)$ est définie à une constante additive près.

b) En déduire l'état final du système abandonné dans un état initial quelconque d'une part dans le cas (a) et d'autre part dans le cas (b).

I.D.3) Montrer que N_i est une fonction croissante de r_i . À quelle situation particulière correspond la valeur $N_c = 8\pi r_m^3 p_m / 3RT$ de N assurant le passage d'un cas à l'autre ? Lequel des cas (a) ou (b) donne un comportement analogue à celui des bulles de savon ? Interpréter brièvement à l'aide de la figure 2.

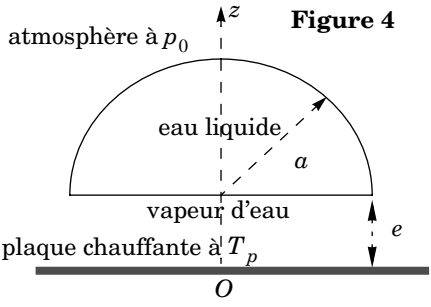
I.D.4) Lorsque le paramètre N passe par la valeur $N_c = 8\pi r_m^3 p_m / 3RT$, le système transite entre un état d'équilibre symétrique $(r_2 - r_1 = 0)$ et un état d'équilibre dissymétrique $(r_2 - r_1 \neq 0)$. Cette situation est analogue à la transition paramagnétique-ferromagnétique. Quel est « l'analogue magnétique » de $r_2 - r_1$? Quel est « l'analogue magnétique » de N ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

Partie II - Le phénomène de Leidenfrost

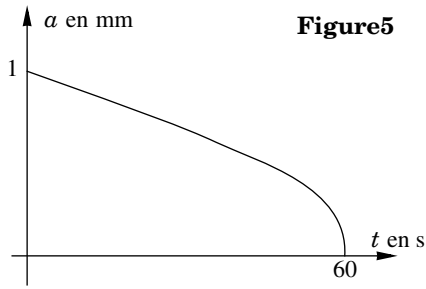
Lorsqu'on dépose une petite goutte d'eau liquide au-dessus d'une plaque chauffante plane horizontale maintenue à une température nettement supérieure à la température d'ébullition de l'eau, on constate que la goutte peut rester en lévitation quelques dizaines de secondes juste au-dessus de la plaque avant de disparaître (le mouvement de la goutte est en général plus compliqué, au point que la goutte donne l'impression de « danser » sur la plaque).

Figure 4



Pour simplifier les calculs, on étudie dans toute la suite une seule goutte et on la suppose hémisphérique de rayon $a(t)$, sa face inférieure plane étant à une hauteur $e(t)$ au-dessus de la plaque chauffante, supposée confondue avec le plan d'équation $z = 0$ (cf. figure 4). Le rayon $a(t)$ et la cote $e(t)$ de la face inférieure sont des fonctions du temps et l'échelle de temps caractéristique de leurs variations est $\tau_1 \approx 50$ s pour un rayon initial $a_0 = 1$ mm. La figure 5 donne dans ce cas un graphe expérimental de $a(t)$.

Figure5

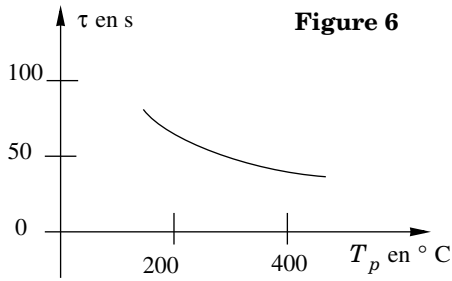


Dans tout le problème on suppose que le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est uniforme avec $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on suppose le référentiel terrestre galiléen.

II.A - Approche qualitative

L'interprétation qualitative de cet effet étudié pour la première fois par Leidenfrost en 1756 est la suivante : la plaque, de température plus élevée que celle de la goutte, cède à celle-ci de la chaleur, ce qui provoque l'évaporation progressive de la goutte liquide ; cette évaporation, qui n'est pas isotrope, provoque un écoulement de vapeur d'eau sous la goutte qui permet à celle-ci de léviter au-dessus de la plaque. Justifier qualitativement le sens des variations de la durée de vie τ de la goutte en fonction de la température T_p de la plaque sur la figure 6.

Figure 6



Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

II.B - Étude thermodynamique

Dans cette partie, on modélise le transfert thermique cédé par la plaque à la goutte d'eau liquide en négligeant les phénomènes de convection et de rayonnement : le transfert thermique est dû exclusivement à la diffusion thermique dans la vapeur d'eau, supposée immobile, située entre la plaque et la goutte. On note λ la conductivité thermique, μ_v la masse volumique et c_v la capacité thermique massique à volume constant de la vapeur d'eau et toutes ces grandeurs sont supposées constantes. On donne l'expression du laplacien d'une fonction $f(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

II.B.1) Rappeler sans démonstration l'équation aux dérivées partielles (E) dont le champ de température $T(r,z,t)$ est solution. On fera apparaître la diffusivité thermique D_{th} dont on rappellera l'expression en fonction de λ, μ_v et c_v.

II.B.2) Dans la suite on néglige les dérivées par rapport à r devant les dérivées par rapport à z dans l'expression de ΔT. À quelle condition sur le rapport e^2/a^2 peut-on valider cette approximation ?

II.B.3) Exprimer par une analyse en ordre de grandeur la durée caractéristique τ^* d'un régime transitoire pour l'équation (E). Dans la suite on raisonne comme si un régime permanent était atteint instantanément et on prend donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ dans l'équation } (E).$$

Donner de façon intuitive un critère de validité de cette approximation mettant en jeu τ^* et τ_1.

II.B.4) Expliciter la solution $T(r,z,t)$ sachant que la plaque impose $T(r,z=0,t)=T_p$ et en supposant que la goutte liquide impose $T(r,z=e(t),t)=T_e$ où T_e est la température d'ébullition de l'eau sous une pression p_0.

II.B.5) En déduire l'expression du vecteur densité de flux thermique $\vec{j}=j_z\vec{e_z}$ en fonction de λ, T_p, T_e et e.

II.B.6) En déduire l'expression du flux thermique ϕ reçu par la face inférieure de la goutte liquide en fonction de λ, T_p, T_e, a et e. Retrouver ce résultat directement en utilisant le concept de conductance thermique.

II.B.7) On suppose désormais que la face supérieure hémisphérique de la goutte n'échange aucun transfert thermique avec l'extérieur. On suppose dans cette question que la goutte d'eau liquide est plongée dans une atmosphère de vapeur d'eau à la pression uniforme et constante p_0 et que la température dans la goutte liquide est en tout point égale à la température d'ébullition T_e à la

t gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

pression p_0. On note l_v l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau sous la pression p_0. On note D_m la masse de vapeur d'eau formée par seconde.

a) En appliquant soigneusement le premier principe de la thermodynamique à un système fermé convenablement choisi, établir l'expression de D_m en fonction de λ, a, T_p, T_e, e et l_v.

b) En déduire que :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda(T_p - T_e)}{2e\mu_l l_v} \qquad (1)$$

où μ_l est la masse volumique de l'eau liquide.

Pour obtenir un modèle calculable de la lévitation de la goutte, il est nécessaire de faire de grosses approximations. La suite du problème propose trois modèles concurrents parmi lesquels on cherche naturellement le plus réaliste. Un certain nombre de calculs sont analogues dans les trois modèles : ils sont demandés dans la partie II.C mais leurs résultats sont admis dans les parties II.D et II.E.

II.C - Modèle A

Hypothèses :

- on néglige la variation de la cote $z = e$ de la face inférieure de la goutte liquide au cours du temps ;
- à tout instant on néglige la quantité de mouvement de l'eau liquide dans la goutte ;
- la vapeur d'eau est émise uniformément, sur toute la surface du disque inférieur de la goutte de cote $z = e$ avec une vitesse $\vec{v} = -V_0 \vec{e}_z$ $(V_0 > 0)$.
- le champ de pression $p(M,t) = p_0$ est uniforme dans l'atmosphère autour de la goutte.

II.C.1) On s'intéresse au système fermé (S^*) constitué de l'eau liquide contenue à l'instant t dans la goutte. À l'instant $t + dt$ le système est constitué de l'eau qui est restée liquide dans la goutte et de la masse δm qui s'est vaporisée et qui est sortie de la goutte avec la vitesse $-V_0 \vec{e}_z$.

a) Exprimer δm en fonction de dt, a, V_0 et de la masse volumique μ_v de la vapeur d'eau.

b) Exprimer la quantité de mouvement de (S^*) à l'instant $t + dt$ en fonction de dt, a et V_0. Quelle est sa quantité de mouvement à l'instant t ? En déduire la variation de sa quantité de mouvement par unité de temps $d\vec{P}^*/dt$.

II.C.2) On rappelle que la résultante des forces de pression associée à une pression uniforme p_0 sur une surface fermée comme celle limitant la goutte est nulle.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

Établir la relation :

$$V_0 = \sqrt{\frac{2g\ a\ \mu_l}{3\mu_v}} \qquad (2)$$

où μ_v et μ_l désignent respectivement la masse volumique de la vapeur et du liquide.

II.C.3) Exprimer le débit massique de vapeur d'eau sous la face plane de la goutte en fonction de V_0, a et de la masse volumique μ_v de la vapeur d'eau. En déduire par confrontation avec II.B.7-a que :

$$e = a^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{3\lambda^2 (T_p - T_e)^2}{2g\ \mu_v\ \mu_l\ l_v^2}} \qquad (3)$$

II.C.4) Déduire de la relation (1) l'équation différentielle dont est solution $a(t)$ et déterminer $a(t)$ en fonction de g, μ_l, μ_v, t et du rayon initial $a_0 = a(t=0)$.

II.C.5) Calculer numériquement la durée de vie τ_A d'une goutte d'eau liquide dans ce modèle A pour $\mu_v = 0,7\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\mu_l = 1,0\cdot 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $a_0 = 1\ \text{mm}$.

II.C.6) Donner trois arguments justifiant le rejet du modèle A.

II.D - Modèle B

Hypothèses :

- on néglige la variation de e au cours du temps et l'eau liquide dans la goutte est immobile ;
- la vapeur d'eau est émise uniformément, sur toute la surface du disque inférieur de la goutte avec une vitesse $\vec{v}(r, z=e) = -V_0\,\vec{e_z}$ $(V_0 > 0)$;
- l'écoulement de vapeur d'eau sous la goutte est incompressible et homogène, de masse volumique μ_v ; il est aussi stationnaire, décrit en coordonnées cylindriques par le champ des vitesses $\vec{v} = u(r)\vec{e_r} + w(z)\vec{e_z}$ où $u(r)$ est indépendant de z et où $w(z)$ est indépendant de r avec $w(z=e) = -V_0$; $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ est le trièdre local associé aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) ;
- le champ de pression sous la goutte est de la forme $p(r,z)$ avec $p(r=a, z) = p_0$ imposée par l'atmosphère ; le champ de pression au-dessus de la goutte est uniforme égal à p_0 ;
- on néglige le rôle de la pesanteur sur l'écoulement de vapeur d'eau.

II.D.1) On envisage le volume fixe limité par le cylindre d'axe Oz et de rayon $r < a$, et les plans $z = 0$ et $z = e$. En faisant un bilan de masse, montrer que $u(r) = V_0\, r/2e$.

t gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

II.D.2) On admet que l'écoulement est irrotationnel.

a) Rappeler sans démonstration les conditions d'utilisation et l'énoncé du théorème de Bernoulli dans ce cas.

b) Dans la limite $(e^2/a^2) \ll 1$, on admet qu'on peut négliger le terme en w^2 dans l'expression du théorème de Bernoulli. En déduire que :

$$p(r,z) = p_0 + \frac{\mu_v V_0^2 (a^2 - r^2)}{8e^2} \qquad (4)$$

II.D.3) On rappelle que la résultante des forces de pression associée à une pression uniforme p_0 sur une surface fermée comme celle limitant la goutte est nulle. Calculer la résultante $\overrightarrow{F_B}$ des forces de pression exercées sur la goutte liquide par l'atmosphère qui l'entoure en fonction de μ_v, a, e et V_0.

II.D.4) En opérant comme en II.C.3 on élimine V_0 (on ne demande pas de le faire). En opérant comme en II.C.2 avec $e^2/a^2 \ll 1$, on obtient une expression de e et de a en fonction des données (on ne demande pas de le faire). Puis en opérant comme en II.C.4 (on ne demande pas de le faire) on obtient l'équation pilotant l'évolution de $a(t)$ qui s'intègre en :

$$\frac{4}{5} a^{5/4} = \frac{4}{5} a_0^{5/4} - t \left(\frac{2\lambda^2 (T_p - T_e)^2 \mu_v \, g}{3 \, l_v^2 \, \mu_l^3} \right)^{1/4} \qquad (5)$$

a) Tracer l'allure du graphe de $a(t)$. Que peut-on dire de la tangente au graphe à l'instant τ_B où $a(\tau_B) = 0$. Comparer avec l'expérience.

b) Calculer numériquement τ_B pour une goutte de rayon initial $a_0 = 1$ mm sachant que :

$\lambda = 0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $T_p - T_e = 300$ K, $\mu_v = 0,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

$l_v = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\mu_l = 1,0 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Comparer avec l'expérience et conclure.

II.E - Modèle C

Hypothèses :

- on néglige la variation de e au cours du temps et l'eau liquide dans la goutte est immobile ;
- la vapeur d'eau est assimilée à un fluide homogène de masse volumique μ_v et de viscosité dynamique η constantes ;
- l'écoulement est décrit en coordonnées cylindriques par un champ des vitesses $\vec{v} = u(r,z,t)\vec{e_r} + w(r,z,t)\vec{e_z}$;

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.

- du fait que $e^2/a^2 \ll 1$, on admet qu'on peut négliger la composante $w(r,z,t)$ et ses dérivées partielles, sauf en $r = 0$;
- l'écoulement est supposé « nourri » fictivement par une arrivée de vapeur d'eau le long de l'axe Oz et on suppose que cette arrivée de vapeur d'eau apporte à l'écoulement toute la vapeur d'eau créée par évaporation de la goutte d'eau liquide, soit une masse D_m par unité de temps ;
- le champ de pression sous la goutte est indépendant de z, de la forme $p(r,t)$ avec $p(r=a,t) = p_0$ imposée par l'atmosphère ; le champ de pression au-dessus de la goutte est uniforme égal à p_0 ;
- on néglige le rôle de la pesanteur sur l'écoulement ;
- l'écoulement est supposé incompressible ;
- l'équation de la dynamique de l'écoulement projetée selon $\vec{e_r}$ s'écrit :

$$\mu_v\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) \qquad (6)$$

- on donne par ailleurs en coordonnées cylindriques :

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} \qquad (7)$$

II.E.1) Soit U un ordre de grandeur de $u(r,z,t)$. Compléter dans le tableau ci-dessous les ordres de grandeur des différents termes contenant la vitesse dans l'équation (6) :

$\mu_v \partial u/\partial t$	$\mu_v u\ \partial u/\partial r$	$\eta\partial^2 u/\partial z^2$	$\eta\partial^2 u/\partial r^2$	$(\eta/r)(\partial u/\partial r)$	$\eta u/r^2$
$\mu_v U/\tau_1$					$\eta U/a^2$

En déduire deux conditions portant sur des nombres sans dimension pour pourvoir simplifier l'équation (6) en :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (6')$$

II.E.2) L'écoulement étant visqueux, la vitesse radiale u doit s'annuler en $z = 0$ et $z = e$. En déduire que :

$$u = \frac{z(z-e)}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (8)$$

II.E.3) Exprimer le débit volumique $D_V(r,t)$ à travers la portion du cylindre d'axe Oz et de rayon r comprise entre les cotes $z = 0$ et $z = e$ en fonction de $\partial p/\partial r$, e, r et η.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 27 pages.