ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–10

1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{r_n}{n!}$, avec $r_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (r_n).

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{r_{n+1}}{n+1}.$$

b) Montrer, en utilisant la question **2)**, que

$$\frac{r_{n+1}}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

4) a) En exprimant que $\frac{r_{n+1}}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, déduire qu'il existe une fonction α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{r_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\alpha(n), \quad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \alpha(n) = 0.$$

En déduire que $\frac{r_n}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

b) Conclure, en utilisant la question **3) a)** que

$$r_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

5) Retrouver ce dernier résultat plus facilement sans utiliser le **b)** de la question **3).**

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.