ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−12

Soit a un réel strictement positif et (x_n) la suite définie par :

$$x_0 = a \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1+(n+1)x_n^2}.$$

1) a) Montrer que la relation précédente définit bien une suite numérique.

b) Expliciter la suite (x_n) lorsque $a = 1$.

2) Montrer que dans le cas général la suite (x_n) est décroissante et minorée.

Déterminer la limite de la suite (x_n).

3) a) Étudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \dfrac{x}{1+(n+1)x^2}$.

b) Montrer que, pour $n \geq 1$, on a : $0 < x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) Montrer que, pour $k \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{x_{k+1}} - \dfrac{1}{x_k} = (k+1)x_k$.

En déduire, que pour $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n-1+\frac{1}{x_1}} \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donner un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers + l'infini.