



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-18

1) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ est convergente.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n \geq 0}$ et $(K_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{n}}.$$

5) a) Calculer I_n en fonctions de n .

b) En admettant que $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (formule de Stirling),

montrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} e \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α .

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION-1

La fonction f est continue sur $[0; 1]$, donc sa valeur absolue $|f|$ est majorée sur $[0; 1]$ par un réel que nous noterons M .

Nous avons donc : $\forall t \in [0; 1], 0 \leq |f(t)| \leq M$.

Multiplions cet encadrement par $\frac{1}{\sqrt{1-t}} > 0$; on obtient :

$$\forall t \in [0; 1[, 0 \leq \frac{|f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-t}}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1 car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0; 1[$. Elle est convergente car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est une fonction de référence sur $[0; 1[$ de la forme $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{M dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.

Le théorème de comparaison des fonctions positives permet de conclure que l'intégrale $\int_0^1 \frac{|f(t)| dt}{\sqrt{1-t}}$ est convergente.

Cela veut dire que **l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t}}$ est absolument convergente, donc convergente.**

QUESTION-2

Remarquons que les fonctions $t \mapsto t^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, sont continues sur $[0; 1]$, donc d'après la question 1) les intégrales I_k sont convergentes.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{\sqrt{1-t}} - \int_0^1 \frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}}. \end{aligned}$$

Or sur $[0; 1[$, $\frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0$; les bornes étant dans l'ordre croissant, on conclut que

$$\int_0^1 \frac{t^n(t-1) dt}{\sqrt{1-t}} \leq 0, \text{ donc } I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

La suite (I_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 : le théorème des suites monotones bornées permet de conclure que la suite (I_n) est convergente.

QUESTION-3

a)

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.