PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–27

Soit N un entier naturel non nul. On considère une urne contenant initialement N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule de la manière suivante :

- Au premier tirage on tire une boule au hasard ;
- soit i le numéro de la boule tirée à un tirage quelconque. Celle-ci est remise dans l'urne et toutes les boules de l'urne portant un numéro strictement inférieur à i sont retirées de l'urne et remplacées par autant de boules portant le numéro i ; on effectue alors le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée lors du n ème tirage.

1) Déterminer la loi de X_1.

2) a) Calculer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, la probabilité

$$P_{X_1=i}(X_2 = j).$$

b) Déterminer la loi de X_2.

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 1) = (X_n = 1).$$

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1)$.

4) a) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_{n+1} = N) = \frac{N-1}{N}P(X_n = N) + \frac{1}{N}.$$

b) En déduire la valeur de $P(X_n = N)$ en fonction de n et de N.

5) On note V_n la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = AV_n$.

b) A est-elle diagonalisable ?

6) On suppose dans cette question que $N = 3$. Déterminer la loi de X_n?

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

question 2−b) pour la loi de X_2, on trouvera $\forall j \in [\![1, N]\!], P(X_2 = j) = \dfrac{2j-1}{N^2}$

question 5−a) pour la loi de X_{n+1} on trouvera

En résumé :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{N} P(X_n = 1)$$

$$\forall j \ / \ 2 \leq j \leq N-1, \ P(X_{n+1} = j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j-1} P(X_n = i) + \frac{j}{N} P(X_n = j)$$

$$P(X_{n+1} = N) = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} P(X_n = j) \right) + P(X_n = N).$$

et pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.