



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-3

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f l'application de I dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \tan(x)$.

- 1) Déterminer une relation entre f et f' et en déduire que f est indéfiniment dérivable.
- 2) Exprimer, pour tout entier naturel n , $f^{(n+1)}$ en fonction de $f, f', \dots, f^{(n)}$; en déduire que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f^{(n)}(x) \geq 0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

a) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_0, a_1, \dots, a_n .

b) Montrer que $f^{(k)}$ est une fonction qui a la même parité que le nombre $k + 1$.

c) Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_{2n} .

4) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral,

montrer que $f(x) \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k$.