ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$a_n = \Big(\int_0^1 \Big(\sqrt{1+x^2} \Big)^n dx \Big)^{\frac{1}{n}}.$$

1) a) Calculer a_2.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

c) En utilisant la fonction $x \longmapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, calculer a_1.

2) Montrer que la suite (a_n) est majorée.

3) a) Montrer que

$$\forall n \geq 1,\ 2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq (\sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}})^2.$$

b) En utilisant la variation de $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$, montrer que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$, on a $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

c) En déduire la limite de la suite (a_n).

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.