



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE :**

**ENONCE-5**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose

$$a_n = \left( \int_0^1 (\sqrt{1+x^2})^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

- 1) a) Calculer  $a_2$ .  
b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

- c) En utilisant la fonction  $x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , calculer  $a_1$ .  
2) Montrer que la suite  $(a_n)$  est majorée.  
3) a) Montrer que

$$\forall n \geq 1, 2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \left( \sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}} \right)^2.$$

- b) En utilisant la variation de  $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ , montrer que, pour  $n \geq 1$  et  $x \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$ , on a  $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}}$ .  
c) En déduire la limite de la suite  $(a_n)$ .