ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–6

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt + \int_0^{nx} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que pour tout réel positif x on a l'inégalité $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt \geq x$.

2) Déterminer les limites de g_n quand $x \to +\infty$ puis $-\infty$.

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α_n. Montrer que $\alpha_n \in]0,1[$.

4) Déterminer une relation entre $g_{n+1}(x)$ et $g_n(x)$ et montrer que la suite (α_n) converge.

5) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Déterminer le signe de $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(\varepsilon)$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$) et déduire qu'il existe un entier n_0 tel que $\alpha_{n_0} < \varepsilon$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.