ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−6

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \int_0^x e^{t^2} dt + \int_0^{nx} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que pour tout réel positif x on a l'inégalité $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt \geq x$.

2) Déterminer les limites de g_n quand $x \to +\infty$ puis $-\infty$.

3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α_n. Montrer que $\alpha_n \in]0, 1[$.

4) Déterminer une relation entre $g_{n+1}(x)$ et $g_n(x)$ et montrer que la suite (α_n) converge.

5) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Déterminer le signe de $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(\varepsilon)$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$) et déduire qu'il existe un entier n_0 tel que $\alpha_{n_0} < \varepsilon$.
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE