ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1) a) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Calculer u_0.

En intégrant par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, exprimer cette dernière en fonction de u_0 et en déduire u_1.

2) Etudier la variation de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1+x^2} dx$.

a) Exprimer, pour $n \geq 1$, $u_n + u_{n-1}$ en fonction de I_n.

b) En intégrant I_n par parties, montrer que, pour $n \geq 1$,

$$2nu_n + (2n-1)u_{n-1} = \sqrt{2}.$$

4) a) En utilisant 3 b) et la croissance de (u_n), montrer que

$$\forall n \geq 1,\ u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{4n-1}.$$

b) En déduire que la suite (nu_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) Que peut-on dire de la série de terme général u_n ?

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.