THEORIE DES MECANISMES HYPERSTATISME, MOBILITE, LIAISON EQUIVALENTE

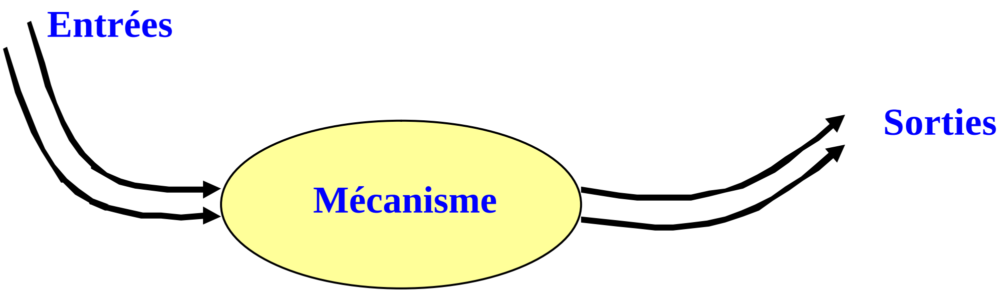
1. DEFINITIONS.

1.1. Mécanisme

Rappelons la notion de mécanisme :

Définition : Un système mécanique ou mécanisme est un ensemble de pièces positionner entre elles par des contacts (donc en liaisons) dans le but de réaliser une ou plusieurs fonctions

On peut schématiser un mécanisme dans le cas général de la façon suivante :



Un mécanisme est schématisé par :

- son plan de définition
- son schéma cinématique ou schéma de structure si il n'est pas miminum
- son graphe des liaisons

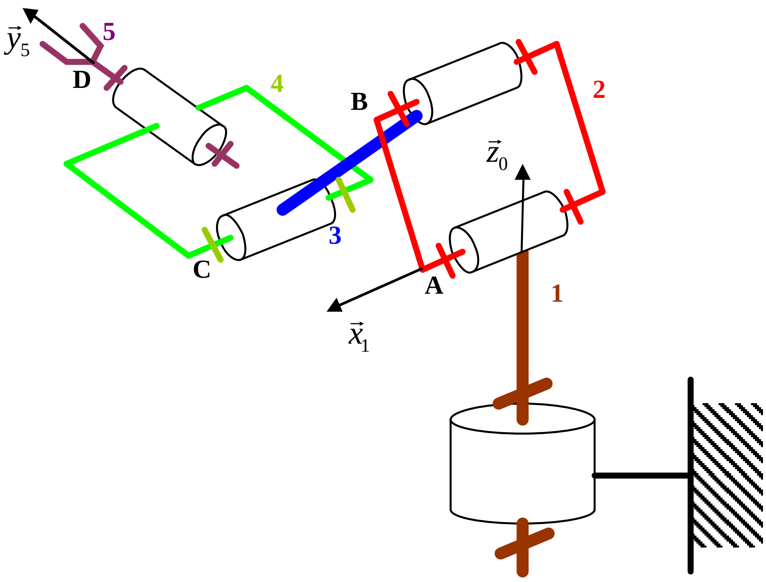
Pour l'étude de l'hyperstatisme et de la mobilité du mécanisme l'utilisation des modèles schématisé (graphe des liaisons et schéma de structure ou cinématique) est suffisant.

1.1.1. A chaîne ouverte

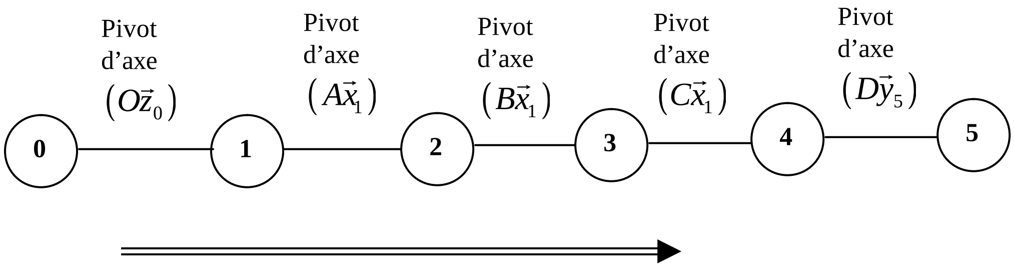
On qualifie un mécanisme de chaîne ouverte lorsque son graphe des liaisons n'est pas bouclé .Cela caractérise les mécanismes de type bras de robot :

Exemple : Bras de robot

Schéma cinématique :



Graphe des liaisons :



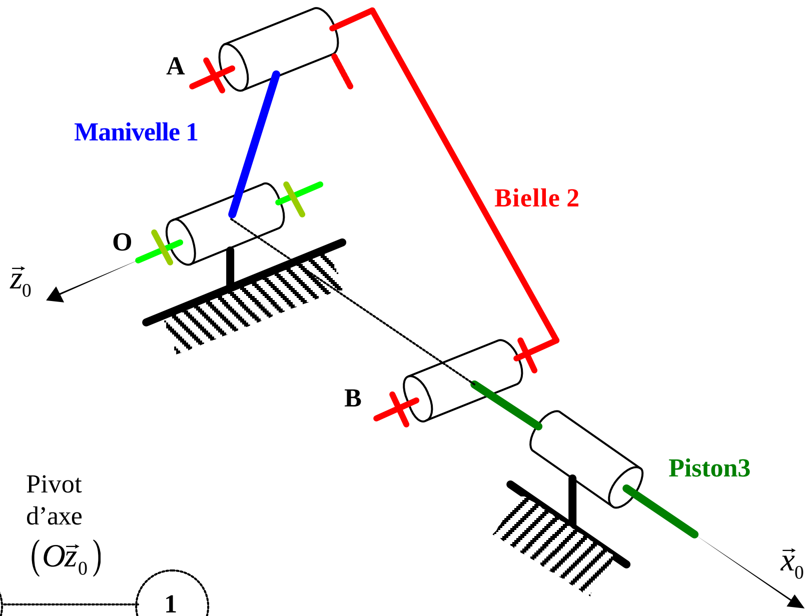
Chaîne ouverte : pas de boucle ou cycle

1.1.2. A chaîne fermée

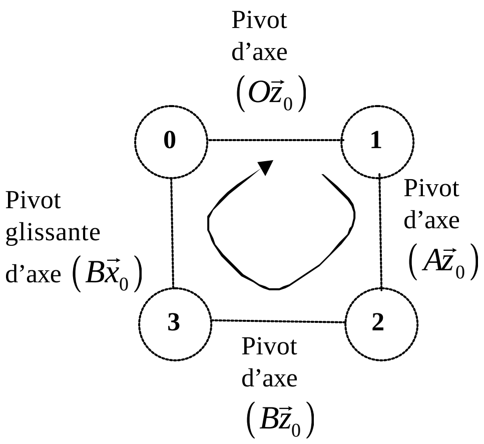
On qualifie un mécanisme de <u>chaîne fermée</u> lorsque son graphe des liaisons <u>est bouclé</u> ou présente un cycle. Cela caractérise les mécanismes de <u>type transformation de mouvement</u>.

Exemple : Système Bielle – Manivelle - Piston

Schéma cinématique :



Graphe des liaisons :



Chaîne fermée : boucle ou cycle

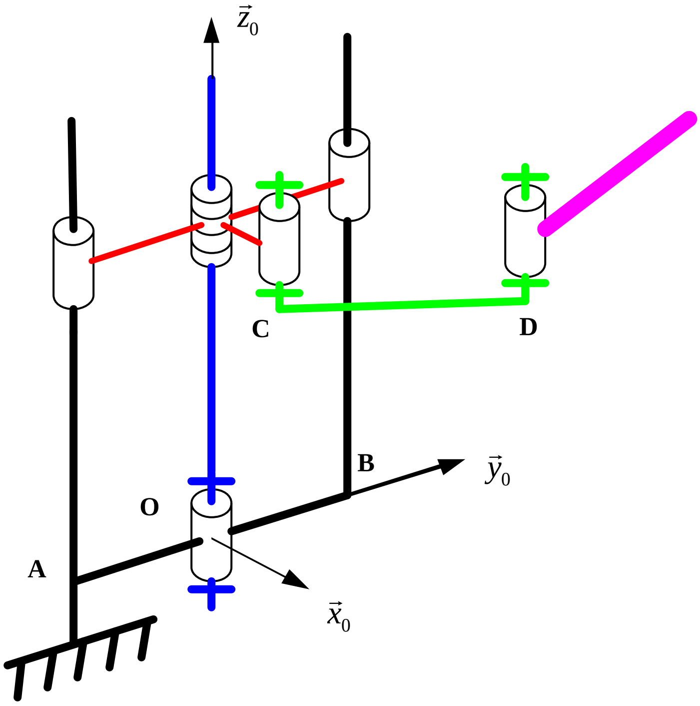
1.1.3. A chaîne complexe –Nombre cyclomatique

<u>Mécanisme à chaînes complexes :</u>

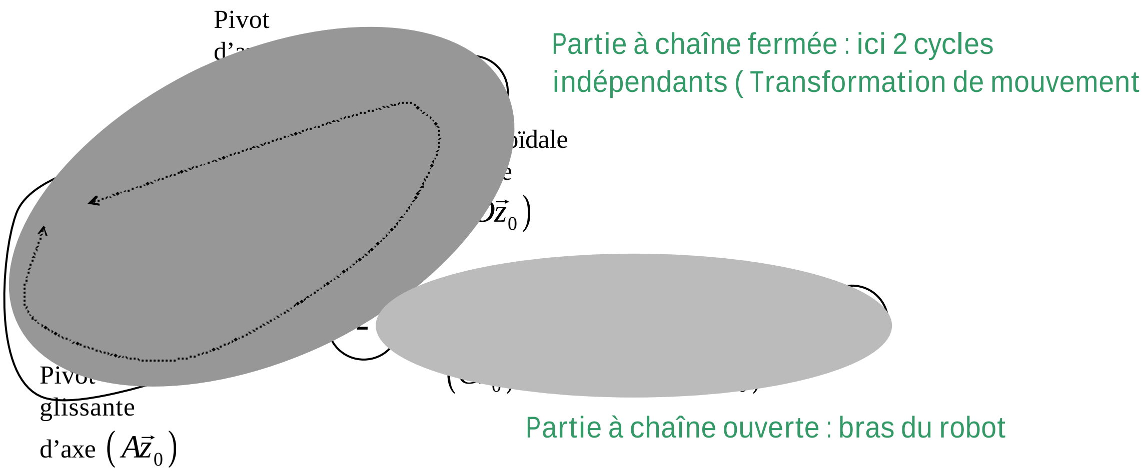
<u>Définition :</u> Un mécanisme à chaîne complexe est un mécanisme pour lequel le graphe des liaisons présente des cycles imbriqués (partie de chaînes fermées) avec ou sans des parties de chaînes ouvertes.

Exemple : Robot de manutention

Schéma cinématique :



Graphe des liaisons :



⇨ 1 chaîne ouverte 2 – 3 -4

⇨ <u>3 cycles</u> : mais seulement 2 indépendants

0 – 2 – 1 – 0 par la pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$

0 – 2 – 1 – 0 par la pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$

0 – 2 – 0 liaison en parallèle = 1 cycle

<u>Nombre cyclomatique :</u>

<u>Définition :</u> **Le nombre cyclomatique, noté γ est le nombre de boucles indépendantes du graphe des liaisons d'un mécanisme**

Sur l'exemple du robot de manutention ci-dessus, on a 3 boucles (deux en traits pleins et une en pointillé) mais uniquement 2 sont indépendantes (la pointillée étant la réunion des deux précédentes en traits pleins). On a donc $\gamma=2$.

Notons :

- l **le nombre de liaisons du graphe des liaisons.**
- n **le nombre de solides du graphe des liaisons.**

On a la relation suivante entre ces deux quantités et le nombre cyclomatique :

$$\boxed{g = l - n + 1}$$

Vérifions la sur notre exemple :

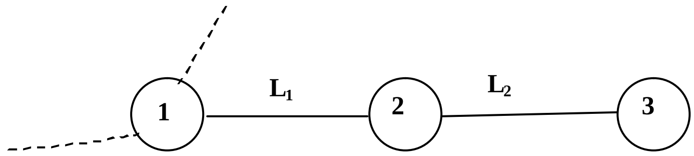
Le robot de manutention possède 5 solides et 6 liaisons. On a donc $l = 6$ *et* $n = 5$*. Ce qui donne* $g = 6 - 5 + 1 = 2$ *cycles indépendants*

1.2. Liaisons équivalentes

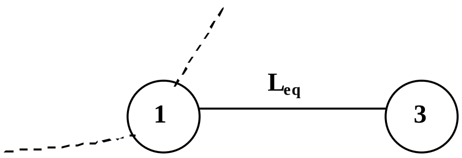
Donnons uniquement les définitions à ce paragraphe.
On reviendra sur la façon de déterminer les liaisons équivalentes au paragraphe 5.

Liaison équivalente de liaisons en série :

Prenons une structure d'une partie de mécanisme représentée par le graphe des liaisons partiel ci-contre :

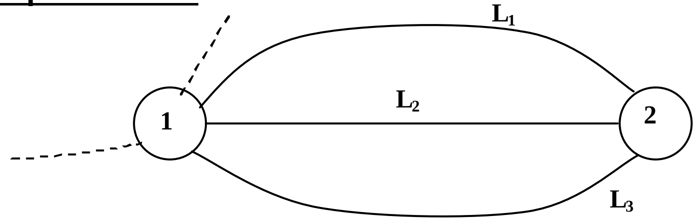


Recherchercher la **liaison équivalente de la mise en série des liaisons L_1 et L_2 revient à chercher à avoir une liaison L_{eq}** telle que le graphe des liaisons soit équivalent à celui-ci :

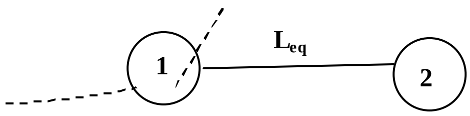


Liaison équivalente de liaisons en parallèles :

Prenons une structure d'une partie de mécanisme représentée par le graphe des liaisons partiel ci-contre :

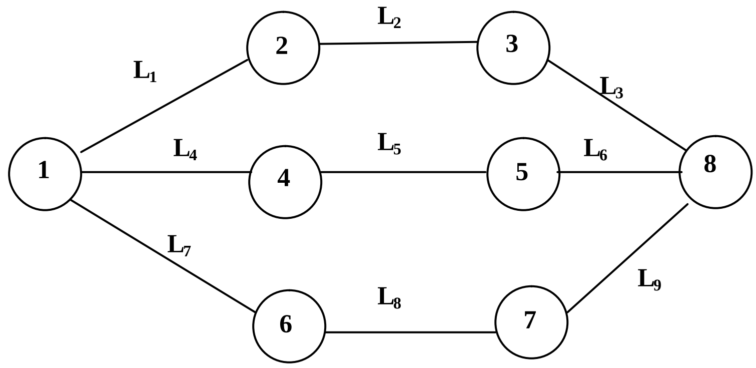


Recherchercher la **liaison équivalente de la mise en parallèle des liaisons L_1 , L_2 et L_3 revient à chercher à avoir une liaison L_{eq}** telle que le graphe des liaisons soit équivalent à celui-ci :

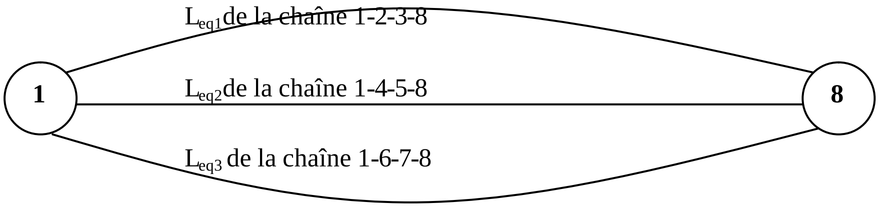


<u>**Liaison équivalente d'un mécanisme :**</u>

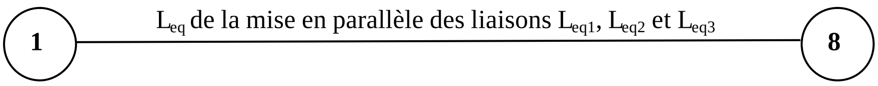
Prenons un mécanisme représenté par son graphe des liaisons ci-dessous



Recherche la **liaison équivalente entre 1 et 2 revient à cher** le graphe des liaisons soit équivalent à celui-ci :



Puis enfin à :



2. Mobilité – Etude cinématique

2.1. Définitions – Mobilité interne – Mobilité utile

<u>**Notations :**</u>

L : Nombre total de liaisons
N : Nombre total de solides dans le mécanisme
n_{ci} : nombre d'inconnues cinématiques da la liaison i = nombre de ddl de la liaison i
N_c : nombre total d'inconnues cinématiques

$$N_c = \sum n_{ci}$$

En écrivant une fermeture cinématique pour chaque cycle indépendant du graphe des liaisons, on obtient un système d'équation à $6g$ équations dans l'espace et $3g$ équations dans le plan :

$$\sum_M \left\{V\left(i/_{i+1}\right)\right\} = {}_M\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} \qquad g \text{ fois}$$

Sur ces $6g$ équations, seules r_C sont indépendantes.
r_C : nombre d'équations cinématiques indépendantes

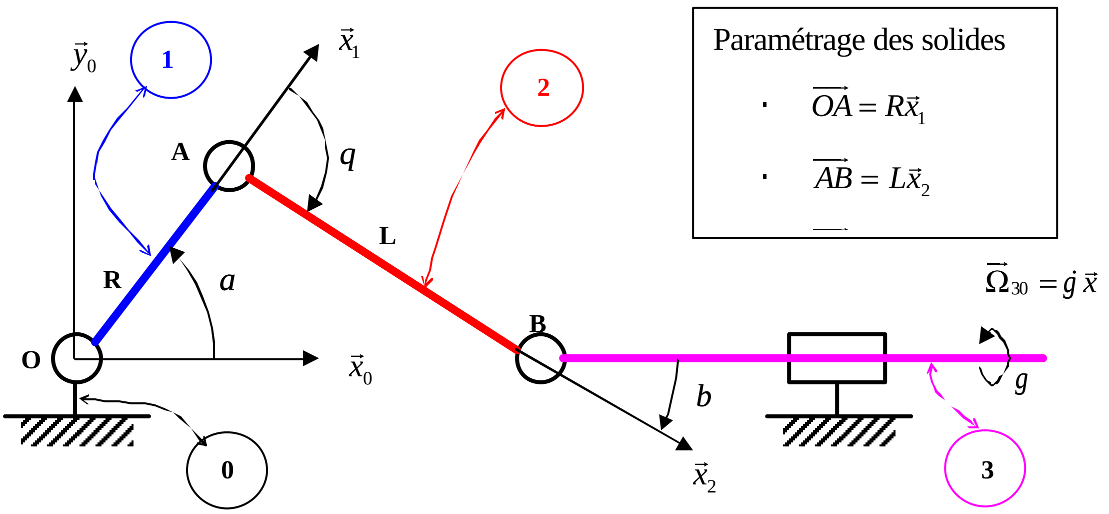
<u>**Définitions :**</u>

- ⇨ On appelle mobilité d'un mécanisme la quantité $m = N_C - r_C$ avec $m = m_u + m_i$
- ⇨ m_i : mobilités internes du mécanisme = mouvements possibles de solides ou d'ensemble de solides n'entraînant pas le mouvement des autres solides du mécanisme

⇨ m_u : mobilités utiles du mécanisme (en général 1 ou 2) = mouvements à fournir (via un actionneur) au mécanisme pour le mettre en mouvement

Exemple : Système Bielle – Manivelle – Piston dans l'espace :

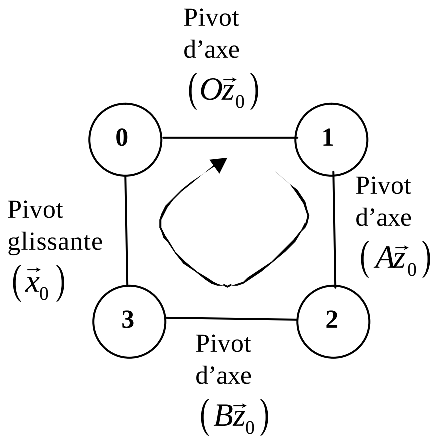
Descriptif :



- **0 : Bâti**
- **1 : Mannivelle**
- **2 : Bielle**
- **3 : Piston**

Graphe des liaisons :

De façon évidente, en les comptant sur le graphe des liaisons ou sur le schéma cinématique :



L = 4

N = 4

$N_C = \underbrace{1+1+1}_{3\ \text{pivots}} + \underbrace{2}_{1\ \text{pivot glissante}}$

O vérifie bien $g = L - N + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

On a donc une seule fermeture cinématique à écrire :

$$_O\{V(0/3)\} + {}_O\{V(3/2)\} + {}_O\{V(2/1)\} + {}_O\{V(1/0)\} = {}_O\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$_O\begin{Bmatrix}-\dot{g} & -\dot{l}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & l\dot{b}\\ -\dot{b} & \underbrace{0}_{\overrightarrow{OD}\wedge\vec{\Omega}_{32}}\end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix}0 & L\dot{J}\sin a\\ 0 & -L\dot{J}\cos a\\ \dot{J} & \underbrace{0}_{\overrightarrow{OA}\wedge\vec{\Omega}_{21}}\end{Bmatrix} + {}_O\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \dot{a} & 0\end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}$$

Système d'équations à 6 équations et 5 inconnues (N_C=5)

$$\begin{cases} 0 = -\dot{g} \\ 0 = 0 \\ 0 = -\dot{b} + \dot{J} + \dot{a} \\ 0 = -\dot{l} + L\dot{J}\sin a \\ 0 = l\dot{b} - L\dot{J}\cos a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Þ 4 équations indépendantes (en bleu) Þ $\boxed{r_C = 4}$

$\boxed{m = N_C - r_C}$

Þ $m = 1 = \underbrace{1}_{m_u} + \underbrace{0}_{m_i}$. Une seule mobilité utile (entrée : rotation a , sortie : translation l) et pas de mobilité interne.

3. Hyperstatisme – Etude statique

3.1. Etude statique

Pour un mécanisme à N solides, on a N-1solides si l'on ne comptabilise pas le bâti (sur lequel on ne peut pas faire d'isolement donc sur lequel on ne peut pas appliquer le Principe Fondamental de la Statique PFS)

On peut donc appliquer le Principe Fondamental de la Statique PFS N-1 fois, c'est à dire obtenir un système a $6(N-1)$ équations.

Sur ces $6(N-1)$ équations, seules r_S sont indépendantes.

Définitions :

- r_S : nombre d'équations issues de la statique INDEPENDANTES
- $N_S = \sum n_{Si}$ nombre total d'inconnues statiques
- n_{Si} nombre d'inconnues statiques de liaison i.

3.2. Hyperstatisme – Isostatisme

Définitions :

- On appele degré d'hyperstatisme, noté h, d'un système mécanique la quantité $h = N_S - r_S$
- On dit qu'un système est isotatique si $h = 0$ (autant d'équations indépendantes que d'inconnues Þ le système a une solution unique