CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

PHYSIQUE 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras.

PARTIE A – OPTIQUE

Ce problème traite de l'observation de deux étoiles E_a et E_b à l'aide d'une lunette astronomique munie d'un détecteur. Les deux étoiles E_a et E_b sont considérées ponctuelles et à l'infini, séparées par une distance angulaire θ, l'étoile E_a étant située dans la direction de l'axe optique de la lunette.
Dans une première partie, on définit la configuration de la lunette utilisée dans les conditions de Gauss et on demande de calculer ses caractéristiques géométriques.
La deuxième partie étudie la tache de diffraction produite par la lunette et évalue la limite de résolution de l'instrument définie comme la plus petite distance angulaire entre deux étoiles décelable.
Enfin, la troisième partie aborde le principe de la mesure de la distance angulaire entre deux étoiles effectuée grâce aux interférences produites par deux fentes placées devant la lunette astronomique.
NB : la distance algébrique entre un point M et un point N est notée $\overline{MN}$.
Les figures sont rassemblées en pages 5 et 6.

I – Etude géométrique

On néglige dans cette partie les effets de la diffraction. On considère une lunette astronomique d'axe optique $z'z$ (Figure 1) constituée d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente L_1 de diamètre $D_1 = 50\,\text{cm}$ et de distance focale image $f'_1 = 7{,}5\,\text{m}$ associé à une lentille divergente L_2 de distance focale image $f'_2 = -0{,}025\,\text{m}$. On désigne respectivement par O_1 et O_2, par F_1 et F'_1, F_2 et F'_2, les centres optiques, les foyers objet et image des lentilles L_1 et L_2.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

1. Quelle est la forme et la direction des faisceaux lumineux des ondes 1 et 2, respectivement émises par les étoiles E_a et E_b, lorsqu'elles parviennent sur la lunette ?

2. On appelle A_1 l'image de l'étoile E_a à travers la lentille L_1. De même, B_1 désigne l'image de E_b à travers L_1.

a) Dans quel plan se situent A_1 et B_1 ? Donner la distance algébrique $\overline{A_1B_1}$.

b) La lentille L_2 est placée peu avant le plan où se forment les images A_1 et B_1. On appelle respectivement A_2 et B_2, les images de E_a et E_b à travers la lunette. Sachant que $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 2$, exprimer et calculer la distance $\overline{O_2A_1}$.

3. On définit la distance focale f' de la lunette par la relation $\overline{A_2B_2} = f'.\theta$.

a) Calculer la distance focale f' de la lunette.

b) Exprimer $\overline{A_1A_2}$. Comment évolue l'encombrement de la lunette par rapport au cas où seule la lentille L_1 existerait ? Quel est l'intérêt de la lentille L_2 ?

4. On place dans le plan où se forment les images A_2 et B_2, une caméra à DTC (Dispositif à Transfert de Charge). Ce récepteur d'images est composé d'une matrice rectangulaire de 768×512 détecteurs élémentaires, appelés pixels, de forme carrée, de côtés $a_1 = 9\mu m$. On suppose que la lunette est librement orientable.
Une image parfaite à travers la lunette d'un point situé à l'infini, produit sur le détecteur un signal donnant une image dont la dimension ne peut être inférieure à la taille d'un pixel. Exprimer et calculer en seconde d'arc, la limite de perception angulaire θ_{min} due au récepteur d'image. Quelle est la plus grande valeur décelable θ_{max} en minute d'arc ?

II – Pouvoir séparateur de la lunette dû à la diffraction

A. Préliminaires

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ éclairant dans le plan xy un diaphragme D de centre O dont la pupille est caractérisée en chaque point $M(x,y)$ par un coefficient de transmission en amplitude complexe $\underline{t}(x,y)$. On étudie l'éclairement en un point P d'un plan Σ_O dont l'intersection avec l'axe $z'z$ est notée O' (figure 2).

1. Enoncer le principe de Huygens-Fresnel. On se place dans le cadre de la diffraction à l'infini. Quelles hypothèses doit-on faire sur les distances OM, $O'P$ et OO' ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

2. Afin d'observer la figure de diffraction à l'infini, on place une lentille convergente L_3 de foyer image F'_3, de distance focale image f'_3 derrière l'ouverture diffractante. On considère les rayons diffractés dans la direction du vecteur unitaire **u** de coordonnées (α,β,γ) (figure 3).
Dans quel plan π convergent ces rayons ? On associe un système d'axes X, Y à ce plan. Exprimer les coordonnées (X_P,Y_P) du point P où convergent ces rayons en fonction de α,β.

3. Dans le cas d'une onde incidente plane sur le diaphragme D, de direction caractérisée par un vecteur unitaire $\mathbf{u_i}$ de coordonnées $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, le principe de Huygens-Fresnel permet d'écrire, en attribuant une phase nulle en P à l'onde qui provient de O, l'amplitude complexe $\underline{A}(P)$ de l'onde au point P, sous la forme : $\underline{A}(P)=K_1\iint_D \underline{t}(x,y)\exp\left(j\dfrac{2\pi(\mathbf{u_i}-\mathbf{u}).\mathbf{OM}}{\lambda}\right)dS$
où K_1 est une constante, dS un élément de la surface de la pupille entourant M, l'intégrale étant étendue à toute la surface du diaphragme.
On déplace le diaphragme D parallèlement à lui-même, dans le même plan, le centre du diaphragme occupant alors une position C. On appelle $(d_x\,;d_y)$ les coordonnées de C ; montrer que l'amplitude en P peut alors s'écrire : $\underline{A'}(P)=\underline{A}(P)\,e^{jh(d_x;d_y)}$ et exprimer la fonction $h(d_x\,;d_y)$ sous la forme d'un produit scalaire de 2 vecteurs que l'on précisera.

B. Application : diffraction par la lunette

1. On place devant l'objectif L_1 de la lunette un écran comportant une ouverture ayant la forme d'un carré centré en O de côtés parallèles aux axes x et y, de dimension $a=\dfrac{D_1}{\sqrt{2}}$ (figure 4). On considère l'étoile E_a seule supposée ponctuelle. On utilise un filtre sélectif permettant d'assimiler l'étoile E_a à une source qui émet une onde monochromatique de longueur d'onde λ.

a) Quel est l'élément diffractant ? Exprimer l'amplitude diffractée $\underline{A}(X_p,Y_p)$ par l'ouverture carrée dans la direction de vecteur unitaire **u** de coordonnées (α,β,γ), en un point P du plan focal image de l'objectif L_1.

b) Donner alors l'éclairement $\varepsilon_a(X_p,Y_p)$ en P sous la forme :
$$\varepsilon_a(X_p,Y_p)=\varepsilon_{a\max}\,g(X_p)\,g(Y_p).$$
Exprimer et tracer $g(X)$. Donner $\varepsilon_{a\max}$ en fonction de K_1 et a.

c) Montrer que la figure de diffraction est formée d'une tache centrale brillante entourée de lumière plus faible répartie en franges (pieds de la figure de diffraction). Où se situe le centre de la figure de diffraction ? Quelle est la valeur de X pour laquelle $g(X)$ s'annule pour la première fois ? En déduire la largeur de la tache centrale.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

d) Comment évolue la figure de diffraction lorsque l'ouverture carrée devient une fente de dimension a_x suivant l'axe x et a_y suivant y, avec $a_y \gg a_x$. Exprimer alors l'amplitude diffractée $\underline{A}(X_p)$ et l'éclairement $\varepsilon(X_p)$ en un point P de l'axe X.

2. L'étoile E_b située à la distance angulaire θ de l'étoile E_a est observée à l'aide de la lunette toujours munie de l'ouverture carrée de telle façon que l'image géométrique B_1 de E_b à travers l'objectif L_1 se forme sur l'axe $F_1'X$. L'étoile E_b est également assimilée à une source lumineuse ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ émettant une onde plane caractérisée par le vecteur unitaire $\mathbf{u_i}$ de coordonnées $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$.

a) Donner la relation entre $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et θ.

b) En supposant que seule l'étoile E_b est observée, exprimer l'éclairement $\varepsilon_b(X_p, Y_p)$ en P. Quel est le centre et l'allure de la tache de diffraction ?

3. Les étoiles E_a et E_b sont observées simultanément et sont d'éclat comparable.

a) E_a et E_b étant deux sources incohérentes, que peut-on dire de l'éclairement total dans le plan focal image de L_1 ? Quelle est l'allure de la figure de diffraction ?

b) Sachant que deux taches de diffraction apparaissent comme séparées lorsque le maximum central de l'une coïncide avec le premier minimum nul de l'autre suivant l'axe X, estimer le plus petit écart angulaire θ_1 décelable (en seconde d'arc) que l'on appelle pouvoir de séparation de la lunette pour la longueur d'onde $\lambda = 0{,}68\,\mu m$.

c) En supposant que L_2 ne limite pas le faisceau, comparer la dimension d'un pixel et la largeur de la tache centrale de diffraction formée sur le détecteur. Conclusion ?

III – Interférences

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ se propageant suivant l'axe $z'z$ en direction de la lunette. On place un écran opaque percé de 2 fentes de largeur b suivant x, d'écartement variable d suivant x devant l'objectif de la lunette toujours muni de l'ouverture, de forme carrée, de côté a du **B.1**, avec $a \gg b$. On appelle C_1 et C_2 les centres des deux fentes (figure 5). On attribue une phase nulle au point P du plan focal de l'objectif à l'onde qui provient de C_1.

1. a) Calculer l'amplitude complexe en un point P de l'axe X, notée $\underline{A'}_1(X_p)$ de l'onde diffractée par la fente 1 dans la direction $\mathbf{u}$ de vecteur unitaire (α, β, γ).

b) Exprimer l'amplitude en P, notée $\underline{A'}_2(X_p)$ de l'onde diffractée dans la direction $\mathbf{u}$ par la fente 2 en fonction de $\underline{A'}_1(X_p)$ et d'une fonction que l'on exprimera.

c) Que peut-on dire de la figure de diffraction donnée par chacune des fentes considérées séparément ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

2. a) Sachant que les deux fentes, éclairées par une même onde, se comportent comme des sources cohérentes, montrer que l'éclairement en P est donné par :

$$\varepsilon_T\left(X_p\right) = 2\varepsilon\left(X_p\right)\, g_1\left(X_p\right)$$

$\varepsilon\left(X_p\right)$ étant l'éclairement diffracté par chaque fente si elle était seule et $g_1\left(X_p\right)$ une fonction à préciser.

b) Tracer $\varepsilon_T\left(X_p\right)$. Montrer que l'on obtient des franges d'interférences « à l'intérieur de la figure de diffraction ». Calculer l'interfrange. Que se passe-t-il si les fentes sont infiniment fines ?

3. On se place dans l'hypothèse où les fentes sont infiniment fines et on observe à l'aide de la lunette les étoiles voisines E_a et E_b.

a) Quelle est la distance dans le plan focal de L_1 entre les centres des figures d'interférences données par E_a et E_b ? On fait varier la distance d. Quelle est la condition pour observer le brouillage des franges ?

b) Donner alors la relation entre θ et d.
Quelle est la valeur de d qui permet de déceler la distance angulaire θ_2 la plus petite ? Calculer θ_2 pour $\lambda = 0{,}68\,\mu m$.

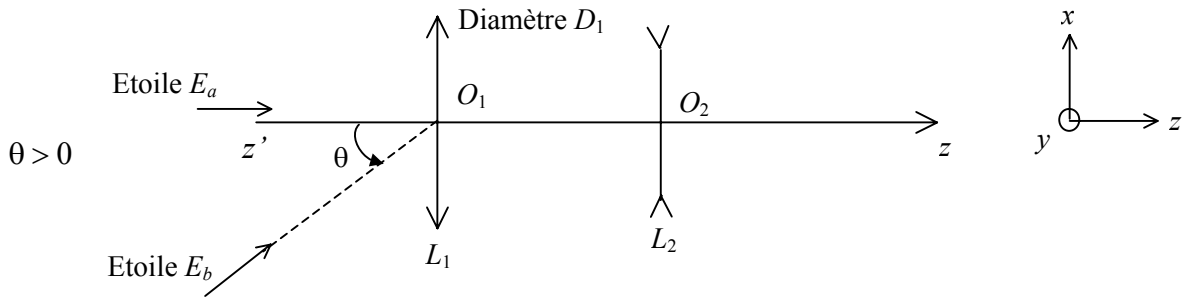

Figure 1 – lunette astronomique

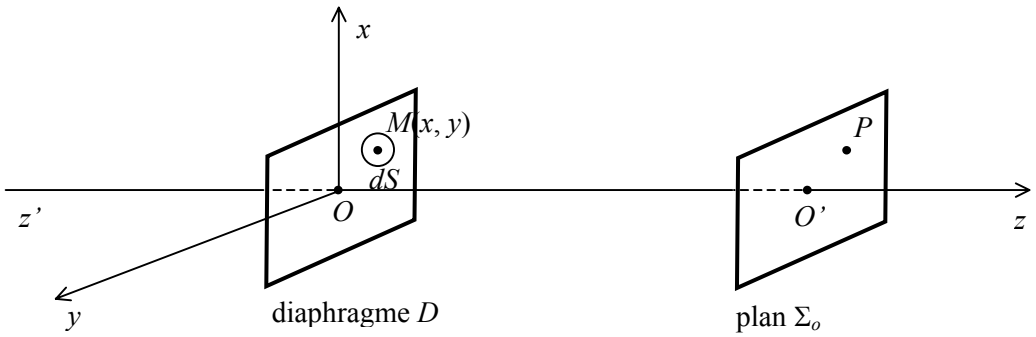

Figure 2

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

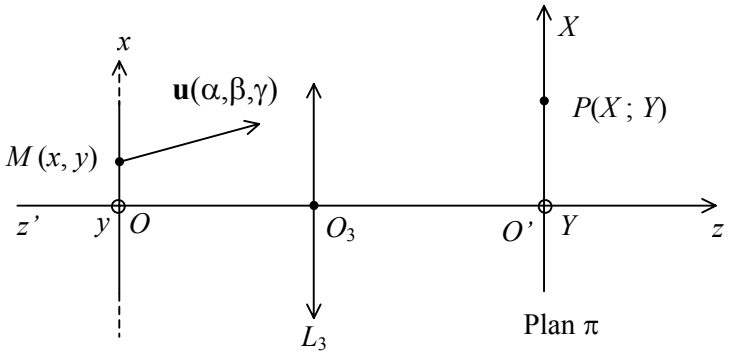

Figure 3

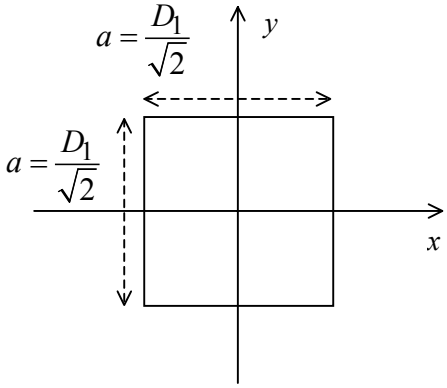

Figure 4

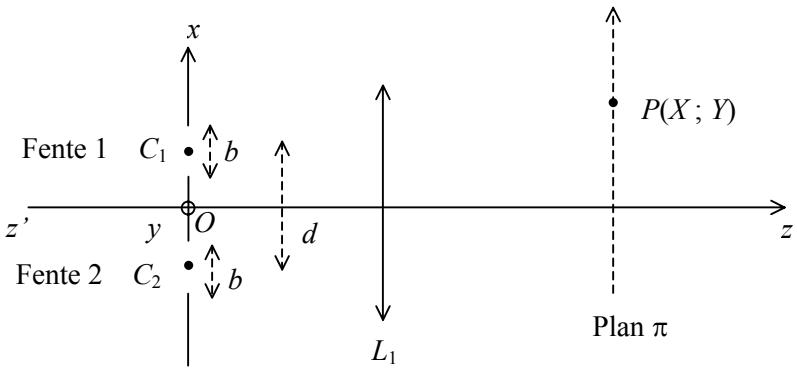

Figure 5

PARTIE B – Electromagnétisme

Ce problème examine quelques propriétés des supraconducteurs du seul point de vue de la magnétostatique. Au passage, il met en évidence celles de ces propriétés qui correspondent à celles des conducteurs parfaits. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$.

I – Préliminaires

I.1 Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

On considère la superposition d'un champ uniforme $\mathbf{B}_a = B_a\mathbf{e}_z$ et du champ $\mathbf{B}_M$ créé par un dipôle magnétique de moment $\mathbf{M}$ placé à l'origine des coordonnées qui s'écrit, au point P repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

$$\mathbf{B}_M(P) = \mathbf{B}_M(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{(3\mathbf{M}.\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}\right\} \text{ avec } \mathbf{r} = \mathbf{OP}.$$

$\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}_a$ sont reliés par $\mathbf{M} = -\left(\frac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a \mathbf{e}_z$ où R est une longueur donnée.

1. Expliciter, pour cette valeur de $\mathbf{M}$, le champ $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_M$ en fonction de B_a, $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r}$ et R.
2. Calculer le produit scalaire $\mathbf{B}_R.r\mathbf{e}_r$ en un point quelconque.
3. En déduire que $\mathbf{B}_R$ est tangent à la sphère de rayon R et de centre O en chacun de ses points. Où l'intensité du champ au voisinage de la sphère est-elle maximale ?
4. Donner un tracé approximatif des lignes de champ de $\mathbf{B}_R$ à l'extérieur de cette sphère.

I.2 Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

On considère la nappe surfacique de courant
$\mathbf{J}_s(r,\theta,\varphi) = J_0 \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$ si $r = R$
$\mathbf{J}_s(r,\theta,\varphi) = 0$ sinon.

1. Déterminer *a priori* la direction du champ $\mathbf{B}(0)$ créé par la distribution au centre de la sphère.
2. Calculer ce champ $\mathbf{B}(0)$. Dans la suite, on admettra que le champ créé par la distribution prend en tout point intérieur à la sphère la même valeur qu'au centre.
   Donnée : $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 4/3$.
3. Quel est le moment magnétique $\mathrm{d}\mathbf{M}(\theta)$ d'une tranche de la distribution de courant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$?
4. Calculer le moment magnétique total $\mathbf{M}_s$ de la nappe de courant $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$.

II – Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

L'état *supraconducteur parfait* d'un matériau, obtenu pour une température inférieure à une température critique T_c et pour une intensité du champ magnétique appliqué inférieure à une valeur critique B_c, est caractérisé par $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ en tout point intérieur.
Une sphère, remplie d'un matériau à l'état de supraconducteur parfait, est placée dans un champ magnétique $\mathbf{B}_a = B_a \mathbf{e}_z$ initialement uniforme. L'intersection de cette sphère de centre O et de rayon R avec le plan $z = 0$ est appelée cercle équatorial.

II.1 Propriétés du courant et du champ. Conséquences.

1. En utilisant la forme locale du théorème d'Ampère, montrer que, dans un supraconducteur parfait en régime stationnaire, le courant volumique est nul.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

2. (a) Rappeler la relation vectorielle de continuité de la composante normale du champ **B** à la traversée d'une surface séparant deux milieux 1 et 2 (on notera $\mathbf{n}_{12}$ la normale à la surface orientée de 1 vers 2).
   (b) En déduire qu'en présence de la sphère supraconductrice (milieu 1) le champ extérieur est tangent à sa surface en chacun de ses points.
   (c) Quelle est la propriété correspondante du champ électrique au voisinage d'un conducteur ?
3. (a) Rappeler la relation vectorielle de discontinuité de la composante tangentielle du champ **B** traduisant le théorème d'Ampère au voisinage de la surface.
   (b) En déduire qu'il existe sur la surface de la sphère une nappe de courant surfacique $\mathbf{J}_s$.
   (c) Quel est le théorème d'électrostatique correspondant pour le champ électrique au voisinage d'un conducteur ?
4. On admet que le champ prend à l'extérieur de la sphère, la valeur trouvée en **I.1**.1. Exprimer $\mathbf{J}_s$ en fonction de B_a, θ, $\mathbf{e}_\varphi$.
5. En déduire le champ créé dans la sphère par cette distribution. Conclure.
6. A.N. : $B_a = 1\text{T}$. Calculer $\left\|\mathbf{J}_s\left(R, \pi/2\right)\right\|$.
7. Expliciter le moment magnétique induit $\mathbf{M}_s$ acquis par la sphère supraconductrice dans le champ en fonction de $\mathbf{B}_a$ et de R.
   A.N. : calculer $\left\|\mathbf{M}_s\right\|$ pour $B_a = 1\text{T}$ et $R = 1\text{cm}$.

II.2 Rupture de supraconductivité. Etat intermédiaire

A température fixée, la supraconductivité cesse si la norme du champ au voisinage de la surface atteint une valeur critique $\|\mathbf{B}_c\| = B_c$. Dans l'état *normal* (non supraconducteur) le niobure d'étain se comporte comme un conducteur usuel non magnétique. Pour le niobure d'étain à 18 K, $B_c = 12{,}5T$.

1. En quel endroit de la surface se produira en premier ce phénomène ?
2. Quel est le courant surfacique critique J_c correspondant dans le niobure d'étain à 18 K ?
3. Quel est le champ $\mathbf{B}_1 = B_1\mathbf{e}_z$ maximum que l'on peut appliquer sans qu'il se produise ?
4. Pour cette valeur du champ appliqué, quel devrait être le champ au niveau du cercle équatorial si la sphère était entièrement dans l'état normal ? En déduire que pour cette valeur de B_a, la sphère ne peut pas être entièrement dans l'état normal.
5. Calculer en fonction de B_c, la valeur B_2 du champ pour laquelle cet *état intermédiaire* cesse et pour laquelle la sphère est entièrement à l'état normal.

II.3 Lévitation magnétique

Une sphère à l'état supraconducteur parfait est placée dans un champ magnétique $\mathbf{B}_a$.

1. Montrer que si le champ $\mathbf{B}_a$ est uniforme, la force résultante exercée par le champ appliqué sur les courants surfaciques est nulle.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.