PHYSIQUE II

Les bulles du champagne sont constituées de dioxyde de carbone. Elles naissent à la surface du verre (partie I). Après une phase de croissance sur place, elles se détachent et montent dans le verre en poursuivant leur croissance (parties II et III). Arrivées à la surface, elles explosent en laissant derrière elles un cratère et en provoquant l'émission d'un jet vertical (partie IV). Ce jet se brise finalement en fines gouttelettes (partie V). Les cinq parties du problème sont largement indépendantes. Dans tout le problème, le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ *est uniforme avec* $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. *Pour une fonction* $y(t)$ *ne dépendant que du temps, on note* $\dot{y}$ *sa dérivée* dy/dt.

Partie I - Formation des bulles

Dans cette partie, on considère le système fermé, de volume V, constitué de deux sous-systèmes (cf. figure 1) :

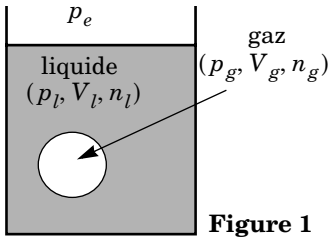

Figure 1

- Une unique bulle de dioxyde de carbone, supposée sphérique de rayon a et de volume V_g, formée de n_g moles de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait ;
- Le liquide, de volume $V_l = V - V_g$, assimilé à une solution aqueuse diluée de dioxyde de carbone, contenant n_l moles de dioxyde de carbone dissous ; on note C le nombre de molécules de dioxyde de carbone dissoutes par unité de volume dans cette solution et on suppose, dans cette partie, C uniforme.

Le liquide est au contact d'une atmosphère imposant une pression extérieure p_e constante. On ne tient pas compte, dans cette partie, de la pesanteur. On note p_l la pression dans la phase liquide et p_g la pression dans la phase gazeuse ; ces pressions sont supposées uniformes, a priori différentes entre elles et différentes de p_e. La température du système est maintenue uniforme, via un contact avec un thermostat de température T constante. Le nombre total de moles de dioxyde de carbone $n = n_g + n_l$ dans le système est supposé constant.

I.A - Soit U l'énergie interne du système et S son entropie. Démontrer que la fonction $G^* = U + p_e V - TS$ est un potentiel thermodynamique.

I.B - On choisit comme variables indépendantes, le rayon a de la bulle, le volume V_l de la phase liquide et le nombre de moles n_g dans la bulle. Compte

Filière PC

tenu du phénomène de tension superficielle, la différentielle de la fonction G^* s'écrit alors :

$$dG^* = \mu_g dn_g + \mu_l dn_l + (p_e - p_l)dV_l + (p_e - p_g)dV_g + Ad\Sigma$$

- où Σ est la surface de la bulle de gaz de rayon a et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle ;
- où $\mu_g = \mu_g^0 + RT\ln(p_g/p^0)$ et $\mu_l = \mu_l^0 + RT\ln(C/C^0)$;
  p^0 est une pression de référence ;
  C^0 est un nombre volumique de référence ;
  μ_g^0 et μ_l^0 ne dépendent que de T, donc sont constantes.

I.B.1) On envisage une variation dV_l de V_l, à n_g et a fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $p_l = p_e$ et interpréter concrètement.

I.B.2) On envisage une variation da de a, à n_g et V_l fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $p_g = p_e + 2A/a$.

I.B.3) On envisage une variation dn_g de n_g, à a et V_l fixés. Montrer qu'à l'équilibre on a $\mu_g = \mu_l$.

I.B.4) Déduire des questions précédentes l'équation (E) donnant implicitement le rayon d'équilibre a_{eq} en fonction de la pression p_e, du nombre volumique C et des constantes μ_g^0, μ_l^0, R, T, A, p^0, p_e et C^0.

I.B.5) Soit p_∞ la valeur de la pression extérieure p_e telle qu'une bulle de rayon a infini soit en équilibre avec la phase liquide pour le même nombre volumique C.

Montrer que la condition d'équilibre (E) s'écrit aussi bien $a_{eq} = 2A/(p_\infty - p_e)$.

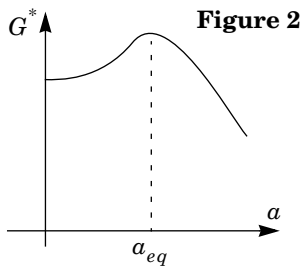

Figure 2

I.C - On suppose dans cette question que le nombre volumique C en dioxyde de carbone dissous est fixé et que la relation $p_g = p_e + 2A/a$ est vérifiée ; en revanche, l'égalité des potentiels chimiques n'est pas forcément réalisée. Dans ces conditions, la fonction G^* n'est plus fonction que de a. La figure 2 fournit l'allure du graphe de $G^*(a)$ pour $0 \le a \le 2a_{eq}$, qu'on ne demande pas de justifier.

I.C.1) Ce graphe est-il compatible avec l'étude précédente ? Quel renseignement supplémentaire en tire-t-on sur l'état d'équilibre $a = a_{eq}$?

I.C.2) Justifier que seules les bulles de champagne ayant un rayon initial supérieur à une valeur critique a_c, à préciser, peuvent croître spontanément.

I.C.3) On donne $A = 7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $p_\infty = 3$ bars et $p_e = 1$ bar. Calculer a_c. Comment expliquer la présence initiale de bulles de rayon supérieur à a_c à la surface du verre ?

Partie II - Croissance et ascension des bulles

II.A - Croissance initiale des bulles

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre B fixe et de rayon variable $a(t)$ contenant $N_g(t)$ molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait ; on note $C_g(t)$ le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. On repère un point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre B. Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note $C(r,t)$ le nombre volumique de molécules de dioxyde de carbone, supposé indépendant de θ et φ. Dans cette partie, on néglige les phénomènes de tension superficielle et la pesanteur, de telle sorte que la pression p est uniforme dans tout le système, avec la même valeur dans la phase gazeuse et dans la phase liquide. L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure dans une bouteille fermée où la pression initiale vaut $p = p_i$, impose la relation $C = \chi p_i / k_B T$ entre le nombre volumique de molécules C dans la phase liquide et la pression p_i dans la phase gazeuse ; χ ne dépend que de la température (c'est donc une constante) ; k_B est la constante de Boltzmann. Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique $p = p_e$ avec $p_e < p_i$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution ; elle s'écrit $C(r = a, t) = \chi p_e / k_B T$. Loin de la bulle, on suppose qu'on a toujours $C(r = \infty, t) = \chi p_i / k_B T$. Ainsi $C(r,t)$ n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution : on note $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_r$ le vecteur-densité de flux de particules ; il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D.

II.A.1) Soit une couronne de champagne liquide, comprise entre les rayons r et $r + dr$. Exprimer le nombre $\delta^2 N_e$ de molécules de dioxyde de carbone qui entrent dans cette couronne entre les instants t et $t + dt$ en fonction de $\partial(r^2 j)/\partial r$, dr et dt.

II.A.2) On se place en régime stationnaire. En déduire que $C(r)$ est de la forme $C(r) = \alpha + \beta / r$ où α et β sont deux constantes.

II.A.3) Bien que le régime réel ne soit pas stationnaire puisque le rayon a dépend du temps, on utilise la forme de $C(r)$ ci-dessus avec $a(t)$. Exprimer α et β en fonction de $a(t)$, χ, p_i, p_e k_B et T.

II.A.4) En déduire le taux de variation dN_g/dt du nombre N_g de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle de gaz en fonction de D, a, χ, p_i, p_e k_B et T.

II.A.5) Montrer que $a(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$a(t)\,\dot{a}(t) = K \qquad (1)$$

où K est une constante qu'on exprimera en fonction de p_e, p_i, χ et D. Vérifier l'homogénéité de l'équation (1).

II.A.6) En déduire l'expression de $a(t)$. Lors de la croissance de la bulle à la surface du verre sur son site de naissance pour $p_e = 1$ bar et $p_i = 3$ bars, le rayon des bulles croît de $a_0 \approx 10^{-6}$ m jusqu'à $a_1 \approx 10^{-5}$ m. Vérifier que dans ces conditions on a $K \approx 4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ sachant que $D \approx 3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ et $\chi \approx 0,7$. Évaluer la durée τ_1 de cette phase.

II.B - Croissance et ascension des bulles

II.B.1) On suppose tout d'abord que $a(t)$ est une constante au cours de l'ascension. On modélise les actions du champagne liquide assimilé à de l'eau de masse volumique $\mu = 1,0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, par la poussée d'Archimède et une force de traînée de Stokes $\vec{F} = -6\pi a \eta \vec{v}$ où $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Pl est la viscosité dynamique du champagne.

a) Justifier que le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède.

b) On néglige par ailleurs la variation de quantité de mouvement de la bulle. En déduire l'expression, numérotée (2), de sa vitesse d'ascension U en fonction de η, μ, g et a.

c) Calculer numériquement cette vitesse pour $a = 0,1$ mm. Justifier le choix de l'expression ci-dessus de la traînée en évaluant un nombre sans dimension.

II.B.2) On admet en outre que l'expression de $a(t)$ établie en II.A.6 reste valable en dépit du mouvement de la bulle. En déduire le mouvement de la bulle et évaluer numériquement la durée τ_2 de son ascension dans une flûte de hauteur $H = 8$ cm. On adoptera les données numériques de la question II.A.6.

Partie III - Effet de masse ajoutée

Le modèle de la partie II (poussée d'Archimède et traînée de Stokes) ne tient pas bien compte de la dépendance temporelle du rayon a et de la vitesse U. On se propose ici de préciser l'effet de ces variations sur la force subie par la bulle de champagne. Le référentiel $(R_O) = (Oxyz)$ du verre dans lequel la vitesse de la bulle est $U(t)\vec{u}_z$ est galiléen. On étudie le mouvement du champagne liquide

autour de la bulle dans le référentiel $(R_B) = (Bxyz)$ dont l'origine est placée au centre de la bulle.

On note $\vec{v}(M,t)$ le champ des vitesses dans le référentiel R_B où M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre B (cf. figure 3). On adopte dans toute cette partie le modèle suivant :

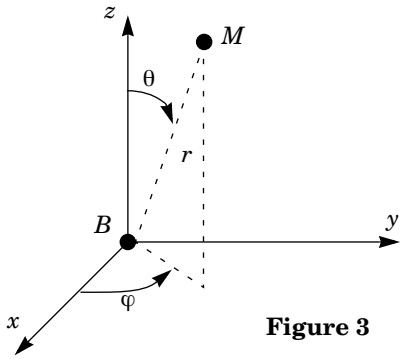

Figure 3

- l'écoulement du champagne autour de la bulle est supposé parfait et on néglige la pesanteur (on espère que l'effet dominant des variations temporelles de a et U n'est pas de modifier la poussée d'Archimède et la traînée de Stokes, mais d'ajouter de nouveaux termes dépendant de $\dot{a}$ et $\dot{U}$) ;
- l'écoulement du champagne autour de la bulle est incompressible ;
- il existe un potentiel des vitesses $\phi(M,t)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\phi$.

III.A - Recherche du potentiel des vitesses

III.A.1) De quelle équation aux dérivées partielles (qui sera numérotée (3)) est solution le potentiel des vitesses ϕ ?

III.A.2) On se propose d'obtenir ϕ par analogie avec des problèmes d'électrostatique dans le domaine $r \geq a$ situé à l'extérieur de la bulle.

a) Rappeler les équations de Maxwell de l'électrostatique. En déduire l'équation aux dérivées partielles dont est solution le potentiel V créé par une distribution de charges ρ connue. Vérifier qu'on obtient l'équation (3) établie en III.A.1 dans le domaine $r > a$ si les sources sont entièrement contenues dans la boule de rayon a.

b) Rappeler sans démonstration l'expression du potentiel électrique V_1 créé par une charge ponctuelle q placée à l'origine B en fonction de q, ε_0 et de la distance r. En déduire que la fonction $\phi_1 = \alpha/r$ est solution de (3).

c) Opérer de manière analogue en exhibant une distribution classique de charges pour justifier que $\phi_2 = \beta\cos\theta/r^2$ est solution de l'équation (3).

d) Chercher par ailleurs une solution $\phi_3(z)$ de l'équation (3) ne dépendant que de z en coordonnées cartésiennes.

e) Justifier que la fonction

$$\phi = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta\cos\theta}{r^2} + \gamma r\cos\theta + \delta$$

vérifie l'équation (3). On adopte cette expression avec $\delta = 0$ dans la suite.

III.A.3) Exprimer les composantes v_r, v_θ et v_φ du champ des vitesses en fonction de α, β, γ, r et θ.

III.A.4) En exploitant le fait que loin de la bulle de gaz, le champagne est au repos dans le référentiel (R_O) lié au verre, exprimer γ en fonction de U.

III.A.5) Sur la bulle, la condition aux limites s'écrit $v_r(r = a(t), \theta) = \dot{a}(t)$; en revanche il n'y a aucune condition sur la composante v_θ car l'écoulement est supposé parfait. En déduire les expressions de α et β en fonction de $a(t)$, $\dot{a}(t)$ et $U(t)$.Vérifier alors qu'à la surface de la bulle $(r = a(t))$ on a :

$$\|\vec{v}\|^2 = \dot{a}^2(t) + \frac{9}{4}U^2(t)\sin^2\theta .$$

III.B - Recherche du champ de pression et de la force subie par la bulle

III.B.1) Quelle est l'expression de la force volumique d'inertie dans le référentiel $(Bxyz)$ lié à la bulle ? Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle volumique $e_p = \mu\dot{U}z$.

III.B.2) Montrer que la grandeur :

$$p + \mu\dot{U}r\cos\theta + \frac{1}{2}\mu v^2 + \mu\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

prend la même valeur en tout point de l'espace ; c'est donc une fonction du temps que l'on note $f(t)$.

III.B.3) En exploitant les résultats précédents, on montre (travail non demandé) que la pression p en un point de la surface de la bulle est de la forme :

$$p = h(t) + \frac{\cos\theta}{a^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu a^3 U}{2}\right) - \frac{9}{8}\mu U^2\sin^2\theta$$

où $h(t)$ est une fonction du temps qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter. On cherche l'expression de la résultante $\vec{F}$ des forces de pression subies par la bulle.

a) Montrer sans calculs que les termes $h(t)$ et $9\mu U^2\sin^2\theta/8$ de la pression ne contribuent pas à $\vec{F}$.

b) Montrer sans calculs que $\vec{F}$ est portée par $\vec{u}_z$.

c) Calculer $F_z = \vec{F}\cdot\vec{u}_z$.

d) Vérifier que cette force peut s'interpréter comme la variation de quantité de mouvement par unité de temps d'un système ouvert fictif que l'on précisera. Commenter.

e) Cette force a été négligée dans la partie II. Discuter numériquement du bien-fondé de cette approximation. On adoptera les résultats et les valeurs numériques des questions II.A.6 et II.B.2.

Partie IV - Explosion des bulles

Au moment où les bulles atteignent la surface, elles y restent fixées en laissant dépasser une portion de sphère qu'on assimilera à une demi-sphère pour simplifier. La situation est alors celle de la figure 4 : une mince couche de liquide d'épaisseur e, limitée par les demi-sphères de centre B et de rayons a et $a+e$ avec $a \gg e$ surplombe la surface libre du champagne ; la pression atmosphérique p_e règne des deux côtés de cette couche liquide.

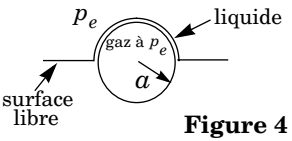

Figure 4

IV.A - Étude expérimentale de l'amincissement du film

Avant que la bulle n'éclate, son épaisseur $e(t)$ diminue car le liquide est entraîné par la pesanteur. L'étude expérimentale de cette phase est impossible dans le cas des bulles du champagne car les bulles émergent en deux lieux aléatoires et leur durée de vie est trop brève. On envisage donc ici seulement le principe d'un suivi optique de l'évolution de l'épaisseur e d'un film « contrôlé ».

On éclaire sous incidence normale par une onde plane un film supposé plan d'épaisseur $e(t)$ uniforme et on observe la lumière réfléchie sur un écran placé parallèlement au film (cf. figure 5). En lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632\,\text{nm}$, on obtient un éclairement réfléchi $\mathscr{E}(t)$ dont l'allure est donnée sur la figure 6 pour un film d'épaisseur initiale importante. On rappelle l'expression du coefficient de réflexion en amplitude d'une onde lumineuse sous incidence normale sur un dioptre $n_1 - n_2$:

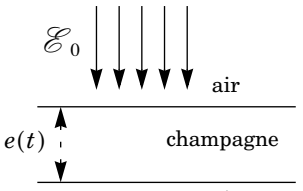

Figure 5

$$r_{n_1 \to n_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

On prendra $n_a = 1$ pour l'air et $n_c = 1,33$ pour le champagne liquide du film. On considère que les coefficients de transmission sont approximativement égaux à 1.

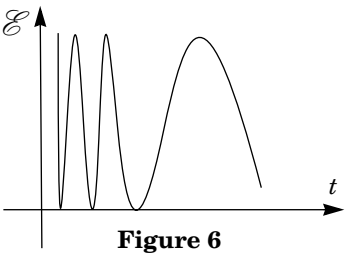

Figure 6

IV.A.1) En invoquant un phénomène d'interférences à deux ondes qu'on précisera, établir l'expression de l'éclairement $\mathscr{E}(t)$ en fonction de λ, $e(t)$, n_a, n_c et de l'éclaire-

ment $\mathscr{E}_0$ du laser. Déduire du graphe de $\mathscr{E}(t)$ l'évolution qualitative de la vitesse de variation $\dot{e}$ de l'épaisseur du film.

IV.A.2) Interpréter le fait que l'éclairement est nul juste avant que le film n'éclate.

IV.A.3) Lorsqu'on observe le film en lumière blanche, on observe des franges colorées. Par analogie avec les observations sur un interféromètre de Michelson, donner une borne supérieure pour l'épaisseur initiale e_0 du film.

IV.B - Disparition du film

La pesanteur a pour effet de fragiliser le film au sommet S de la bulle, de telle sorte qu'il finit par se percer en ce point à un instant qu'on prend dans cette partie comme origine des temps. Pour étudier la phase suivante correspondant à la croissance du trou, on adopte le modèle de Culik (cf. figure 7) :

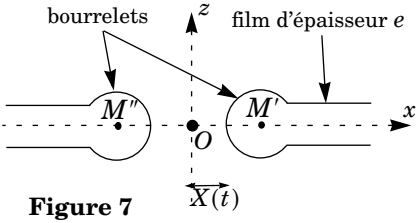

Figure 7

- le film liquide est compris entre les plans de cotes $z = \pm e/2$ et son épaisseur e est indépendante du temps ;
- le problème est symétrique par rapport au plan $x = 0$ et invariant par translation selon $\vec{u}_y$; on note b la largeur du film dans cette direction ;
- à l'instant $t > 0$, le film a disparu entre les abscisses $\pm X(t)$ et il s'est formé des bourrelets centrés en M' et M'' ; le bourrelet centré en M' (respectivement M'') contient tout le liquide qui était contenu à $t = 0$ dans la partie du film initialement comprise entre les abscisses 0 et $X(t)$ (resp. $(-X)(t)$ et 0) ;
- à l'instant t, le liquide est au repos dans les domaines $|x| > X(t)$ et possède une vitesse $\vec{v} \approx \dot{X}(t)\vec{u}_x$ dans le bourrelet centré en M' ;
- on ne prend en compte parmi les forces appliquées au bourrelet centré en M' que les deux forces de tension superficielle appliquées sur chacune des coupures liant le bourrelet aux faces planes du film ; chacune de ces forces vaut $\vec{F} = Ab\vec{u}_x$ (cf. figure 8).

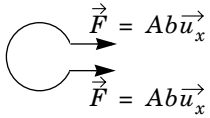

Figure 8

IV.B.1) Considérons le système fermé constitué de la masse $m(t)$ de liquide contenue à l'instant t dans le bourrelet et de la masse δm contenue à l'instant t dans la partie plane du film et qui va entrer dans le bourrelet entre les instants t et $t + dt$. Exprimer la variation de quantité de mouvement par unité de temps $d\vec{P}/dt$ de ce système en fonction de e, X, b, $\dot{X}$, μ et $\ddot{X}$. Dans la suite on néglige le terme en $X\ddot{X}$ devant le terme en $\dot{X}^2$ dans cette expression.