



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur :

ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE ÉPREUVE :

**MATHÉMATIQUES**

298

Option économique

EDHECMATE

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

## Exercice 1

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et on pose  $u = (2, 1, -2)$ .

1) a) Montrer que  $\text{Ker } f = \text{vect}(u)$ .

b) La matrice  $A$  est-elle inversible ?

2) a) Déterminer le vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et tel que  $f(v) = u$ .

b) Démontrer que le vecteur  $w$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la 2<sup>ème</sup> coordonnée dans  $\mathcal{B}$  vaut 1, et qui vérifie  $f(w) = v$  est  $w = (0, 1, -1)$ .

c) Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  que l'on notera  $\mathcal{B}'$ . On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

3) a) Écrire la matrice  $N$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ . En déduire la seule valeur propre de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices  $A, N, P$  et  $P^{-1}$ , puis en déduire que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 3, on a :  $A^k = 0$ .

4) On note  $C_N$  (respectivement  $C_A$ ) l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $N$  (respectivement  $A$ ).

a) Montrer que  $C_N$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et que  $C_N = \text{vect}(I, N, N^2)$ .

On admet que  $C_A$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

b) Établir que :  $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$ . En déduire que  $C_A = \text{vect}(I, A, A^2)$ .

Quelle est la dimension de  $C_A$  ?