ESCP 1998 Option Eco Mathématiques III

EXERCICE I

Dans tout l'exercice n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a) Etudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{n+1} + x^n$.

   b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.

   c) En déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$

   a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E'_n) \qquad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.

      ii. En déduire que $b = c = 0$.

      iii. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

      iv. Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

   c) On note μ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de μ.

EXERCICE II

On désigne par λ un paramètre réel strictement supérieur à 1. Soit H l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et soit D l'ensemble des points de H tels que $y \neq 0$.

L'objet de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur H par

$$f(x, y) = x^\lambda\, y - y^2 - y\, \ln(x+1) + 1.$$

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\phi(x) = x^\lambda - \ln(x+1)$ et ϕ' sa dérivée.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

a) Montrer que l'équation $\phi'(x) = 0$ admet une racine et une seule dans $]0, +\infty[$.
On note b cette racine et on pose $\phi(b) = 2c$. Montrer que $c < 0$.

b) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet une racine et une seule, notée a, dans $]0, +\infty[$ et que $a > b$.

2. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction f.

3. a) Déterminer l'ensemble des points $(x, y) \in H$ vérifiant $f'_x(x, y) = 0$.

b) Déterminer les points $(x, y) \in H$ vérifiant $f'_x(x, y) = 0$ et $f'_y(x, y) = 0$. On exprimera les solutions (x, y) trouvées à l'aide des nombres a, b et c définis à la question **1**.

4. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f admet dans D un extremum en un unique point (x_λ, y_λ) que l'on précisera.

EXERCICE III

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité P.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n - 1$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. a) Déterminer l'espérance $E(Z)$ et la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Y_n.
Déterminer les limites des suites $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ et $(V(Y_n))_{n\geq 1}$.

c) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, strictement monotone, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z))$.

2. Pour tout réel x on note $\mathrm{Ent}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.

a) Montrer que, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Ent}(nx)}{n} = x$.

b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a, b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que $I_n(a, b) = \mathrm{Ent}(nb) - \mathrm{Ent}(na)$.

c) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Z \leq b)$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\mathrm{Ent}(n\,Z)$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.

a) Montrer Z_n et Y_n ont même loi de probabilité.

b) Trouver la fonction de répartition et une densité de D_n.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$, exprimer à l'aide de la variable aléatoire Z l'événement $\{Z_n = \dfrac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\}$. En déduire la valeur de $P(Z_n = \dfrac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y)$.

d) Montrer que les variables aléatoires Z_n et D_n sont indépendantes.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

ESCP-EAP : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

$f'_n(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x+n)$.

- Si n est pair, alors $n-1$ est impair : $f'_n(x)$ est du signe de $x((n+1)x+n)$.

C'est un trinôme de racines 0 et $-\frac{n}{n+1}$; il est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle défini par les racines.

- Si n est impair, alors $n-1$ est pair : $f'_n(x)$ est du signe de $(n+1)x+n$.

$f'_n(x)$ sera positive pour $x > -\frac{n}{n+1}$.

En posant $\alpha_n = -\frac{n}{n+1}$, on obtient les tableaux de variations suivants :

n pair

x	$-\infty$		-1		α_n		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair

x	$-\infty$		-1		α_n		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1–b)

D'après les tableaux de variations :

Si n est impair, par croissance de f_n sur $[-\frac{n}{n+1}; +\infty[$, on déduit que $f(-\frac{n}{n+1}) < 0 < 2$.

Si n est pair,

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{n}{n+1}) &= \Big(-\tfrac{n}{n+1}\Big)^n \Big(-\tfrac{n}{n+1}+1\Big) \\ &= \Big(-\tfrac{n}{n+1}\Big)^n \Big(\tfrac{1}{n+1}\Big) \quad (\text{or } n \text{ est pair}) \\ &= \Big(\tfrac{n}{n+1}\Big)^n \Big(\tfrac{1}{n+1}\Big) < 1 < 2. \end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.