HEC 1998 option Eco Mathématiques III

EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4.

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ, le système

$$\begin{cases} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ, les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme T_nP définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_nP(x) = (nx+1)\,P(x) + (1-x^2)\,P'(x).$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_nP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1,\ X, \ldots\ X^n$ où X^k désigne, pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n, déterminer simplement une valeur propre de T_n.

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

a) Etant donné un réel λ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2}\, dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que $\dfrac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \dfrac{a}{1 - t} + \dfrac{b}{1 + t}$.

b) Montrer que si les nombres $h = n + 1 - \lambda$ et $k = n - 1 + \lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n-1) \leq \lambda \leq n + 1$.

c) Pour $n = 3$ quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions?

d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h, définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x)\exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ?

e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.
L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.
On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement : *on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro* n *et* $n + 1$,

et on pose $u_n = P(U_n)$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on note

- A_n l'événement : *les* n *premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le* n*-ième lancer donne face*,
- B_n l'événement : *les* n *premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le* n*-ième lancer donne pile*,

et on pose $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3.

   b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} \,/\, A_n), \quad P(A_{n+1} \,/\, B_n), \quad P(B_{n+1} \,/\, A_n), \quad P(B_{n+1} \,/\, B_n).$$

d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p\, y_n \\ y_{n+1} &= q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

b) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n, puis de u_n, en fonction de n, α et β.

d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

HEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a) i)

$$\begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0 \quad L_2 \longleftarrow L_4 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_2 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \quad L_4 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \mu L_1 - 2L_2 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1 - \mu L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{S}_0)$$
$$\begin{cases} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0. \end{cases} \quad (\mathbf{S}_1)$$

ii) Résolution du sous-système $(\mathbf{S}_1)$.

Si $\mu = 0$, le système proposé équivaut à $\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$ i.e $x_1 = x_4 = 0$.

Si $\mu \neq 0$, on effectue $L_3 \longleftarrow 2\mu L_3 + (3-\mu^2)L_4$; le système proposé équivaut alors à

$$\begin{cases} (-4\mu^2 + (3-\mu^2)^2)x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases} \text{ i.e } \begin{cases} (3-\mu^2+2\mu)(3-\mu^2-2\mu)x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation, le coefficient de x_4 est $(\mu+1)(\mu-3)(\mu-1)(\mu+3)$. Donc

- $\mu \notin \{-3,-1,1,3\} \Longrightarrow x_4 = 0$, donc $x_1 = 0$ car $\mu \neq 0$.
- $\mu \in \{-3,-1,1,3\}$. Alors la première équation de $(\mathbf{S}_1)$ est satisfaite, il ne reste que la seconde, qui donne $x_1 = \dfrac{3-\mu^2}{2\mu}x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$.

iii) Résolution du système

- $\mu \notin \{-3,-1,1,3\}$, deux cas se présentent ;

1. $\mu = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sans difficultés.

2. $\mu \neq 0$, alors

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

le système $(\mathbf{S}_1)$ donne $x_1 = x_4 = 0$ (on vient de le voir).
Le système $(\mathbf{S}_0)$ donne alors $\mu x_2 = \mu x_3 = 0$, soit $x_2 = x_3 = 0$ **car** $\mu \neq 0$.
Conclusion : on a dans ce cas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$,

le système $\mathbf{S}_1$ donne $x_1 = \dfrac{3-\mu^2}{2\mu} x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$ d'après **ii)**.

Le système $\mathbf{S}_0$ donne alors

$x_2 = -\mu x_1 = \dfrac{\mu^2 - 3}{2} x_4$ et $x_3 = -\mu x_4$.

Donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \left\{ x_4 \left(\dfrac{3-\mu^2}{2\mu}, \dfrac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1 \right) \ / \ x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

En résumé :

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, le système est de Cramer ; il n'admet que la solution triviale $(0, 0, 0, 0)$.
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions du système est :

$$\mathcal{S}' = \left\{ x_4 \left(\frac{3-\mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1 \right) \ / \ x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

1–b)

La matrice du système précédent est $S = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}$.

La matrice A correspond à $\mu = 1$.
λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Elle correspond à $\mu = 1 - \lambda$.

$A - \lambda I$ non inversible $\iff$ Le système n'est pas de Cramer
$\iff$ $1 - \lambda \in \{-3, -1, 1, 3\}$

$$\iff \begin{cases} 1-\lambda = -3 & \text{ou} \\ 1-\lambda = -1 & \text{ou} \\ 1-\lambda = 1 & \text{ou} \\ 1-\lambda = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 4 & \text{ou} \\ \lambda = 2 & \text{ou} \\ \lambda = 0 & \text{ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Détermination des sous-espaces propres.
Notons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ

- $E_4(A)$ correspond à $\mu = -3$. Donc

$E_4(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; posons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $E_2(A)$ correspond à $\mu = -1$. Donc

$E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; posons $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

- $E_0(A)$ correspond à $\mu = 1$. Donc

$$E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ ; posons } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_{-2}(A)$ correspond à $\mu = 3$. Donc

$$E_{-2}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ ; posons } V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : La matrice A admet quatre valeurs propres distinctes,

elle appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: elle est diagonalisable.

On conclut que la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) constitue une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

QUESTION–2

2–a)

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

$(nx+1)P(x)$ est de degré $\leq n+1$, $(1-x^2)P'x)$ aussi, donc $T_n(P)$ également. Le terme en x^{n+1} de $T_nP(x)$ est $nxa_nx^n - na_nx^{n+1} = 0$.

Conclusion : $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$\forall (P,Q) \in \Big(\mathbb{R}_n[X]\Big)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}
T_n(P+\lambda Q)(x) &= (nx+1)(P+\lambda Q)(x) + (1-x^2)(P+\lambda Q)'(x) \\
&= (nx+1)(P(x)+\lambda Q(x)) + (1-x^2)(P'(x)+\lambda Q'(x)) \\
&= (nx+1)P(x) + \lambda(nx+1)Q(x) + \\
&\qquad (1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x) \\
&= (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x) + \\
&\qquad \lambda\Big((nx+1)Q(x) + (1-x^2)Q'(x)\Big) \\
&= T_n(P)(x) + \lambda T_n(Q)(x) \\
T_n(P+\lambda Q)(x) &= (T_n(P) + \lambda T_n(Q))(x).
\end{aligned}$$

Donc $T_n(P+\lambda Q) = T_n(P) + \lambda T_n(Q)$.

T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2–b)

Notons P_k le polynôme $x \longmapsto x^k$.

$$\begin{aligned}
&\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \\
T_n(P_k)(x) &= (nx+1)x^k + (1-x^2)kx^{k-1} \\
&= (n-k)x^{k+1} + x^k + kx^{k-1} \\
&= kx^{k-1} + x^k + (n-k)x^{k+1} \\
T_n(P_k)(x) &= kP_{k-1}(x) + P_k(x) + (n-k)P_{k+1}(x) \\
T_n(P_0)(x) &= nx + 1 \\
T_n(P_n)(x) &= x^n + nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.