HEC 1998 option Eco Mathématiques III

EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \mu x_1 + x_2 \qquad\qquad = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 \qquad\qquad = 0 \end{array}\right.$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4.

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2)\left\{\begin{array}{lcl} \mu x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = & 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = & 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ, le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = & 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ, les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_n P$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_n P(x) = (nx+1)\,P(x) + (1-x^2)\,P'(x).$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_n P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1,\ X, \ldots\ X^n$ où X^k désigne, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n, déterminer simplement une valeur propre de T_n.

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n.

a) Etant donné un réel λ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2}\, dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que $\dfrac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \dfrac{a}{1 - t} + \dfrac{b}{1 + t}$.

b) Montrer que si les nombres $h = n + 1 - \lambda$ et $k = n - 1 + \lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n - 1) \leq \lambda \leq n + 1$.

c) Pour $n = 3$ quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions?

d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h, définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x)\exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ?

e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.
L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.
On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement : *on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n + 1$,*

et on pose $u_n = P(U_n)$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on note

- A_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne face,*

- B_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne pile,*

et on pose $x_n = P(A_n)$, $\quad y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3.

   b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1}\,/\,A_n), \quad P(A_{n+1}\,/\,B_n), \quad P(B_{n+1}\,/\,A_n), \quad P(B_{n+1}\,/\,B_n).$$

d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & p\,y_n \\ y_{n+1} & = & q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}\cdot$

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

b) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot$ Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\cdot$

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n, puis de u_n, en fonction de n, α et β.

d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}\cdot$ Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

HEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a) i)

$$\begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \quad L_2 \longleftarrow L_4 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_2 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \quad L_4 \longleftarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \mu L_1 - 2L_2 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1 - \mu L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (\mathbf{S}_0) \\ (\mathbf{S}_1) \end{matrix}$$

ii) Résolution du sous-système $(\mathbf{S}_1)$.

Si $\mu = 0$, le système proposé équivaut à $\begin{cases} 3x_1 & = 0 \\ 3x_4 & = 0 \end{cases}$ i.e $x_1 = x_4 = 0$.

Si $\mu \neq 0$, on effectue $L_3 \longleftarrow 2\mu L_3 + (3-\mu^2)L_4$; le système proposé équivaut alors à

$$\begin{cases} (-4\mu^2 + (3-\mu^2)^2)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} (3-\mu^2+2\mu)(3-\mu^2-2\mu)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation, le coefficient de x_4 est $(\mu+1)(\mu-3)(\mu-1)(\mu+3)$. Donc

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\} \Longrightarrow x_4 = 0$, donc $x_1 = 0$ car $\mu \neq 0$.
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Alors la première équation de $(\mathbf{S}_1)$ est satisfaite, il ne reste que la seconde, qui donne $x_1 = \dfrac{3-\mu^2}{2\mu}x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$.

iii) Résolution du système

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, deux cas se présentent ;

1. $\mu = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sans difficultés.

2. $\mu \neq 0$, alors

le système $(\mathbf{S}_1)$ donne $x_1 = x_4 = 0$ (on vient de le voir).
Le système $(\mathbf{S}_0)$ donne alors $\mu x_2 = \mu x_3 = 0$, soit $x_2 = x_3 = 0$ **car** $\mu \neq 0$.
Conclusion : on a dans ce cas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$,

le système $\mathbf{S}_1$ donne $x_1 = \dfrac{3-\mu^2}{2\mu} x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$ d'après **ii)**.
Le système $\mathbf{S}_0$ donne alors
$x_2 = -\mu x_1 = \dfrac{\mu^2 - 3}{2} x_4$ et $x_3 = -\mu x_4$.

Donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \left\{x_4\left(\dfrac{3-\mu^2}{2\mu}, \dfrac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1\right) \;/\; x_4 \in \mathbb{R}\right\}$.

En résumé :

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, le système est de Cramer ; il n'admet que la solution triviale $(0, 0, 0, 0)$.
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions du système est :

$$\mathcal{S}' = \left\{x_4\left(\frac{3-\mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1\right) \;/\; x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

1–b)

La matrice du système précédent est $S = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}$.

La matrice A correspond à $\mu = 1$.
λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Elle correspond à $\mu = 1 - \lambda$.

$$\begin{aligned} A - \lambda I \text{ non inversible } &\iff \text{Le système n'est pas de Cramer} \\ &\iff 1-\lambda \in \{-3, -1, 1, 3\} \\ &\iff \begin{cases} 1-\lambda = -3 & \text{ou} \\ 1-\lambda = -1 & \text{ou} \\ 1-\lambda = 1 & \text{ou} \\ 1-\lambda = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = 4 & \text{ou} \\ \lambda = 2 & \text{ou} \\ \lambda = 0 & \text{ou} \\ \lambda = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Détermination des sous-espaces propres.

Notons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ

- $E_4(A)$ correspond à $\mu = -3$. Donc

$E_4(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; posons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $E_2(A)$ correspond à $\mu = -1$. Donc

$E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; posons $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $E_0(A)$ correspond à $\mu = 1$. Donc

$$E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ ; posons } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_{-2}(A)$ correspond à $\mu = 3$. Donc

$$E_{-2}(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ ; posons } V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : La matrice A admet quatre valeurs propres distinctes, **elle appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: elle est diagonalisable.**

On conclut que la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) constitue une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

QUESTION–2

2–a)

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

$(nx+1)P(x)$ est de degré $\leq n+1$, $(1-x^2)P'x)$ aussi, donc $T_n(P)$ également. Le terme en x^{n+1} de $T_nP(x)$ est $nxa_nx^n - na_nx^{n+1} = 0$.

Conclusion : $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$\forall (P,Q) \in \Big(\mathbb{R}_n[X]\Big)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}
T_n(P+\lambda Q)(x) &= (nx+1)(P+\lambda Q)(x) + (1-x^2)(P+\lambda Q)'(x) \\
&= (nx+1)(P(x)+\lambda Q(x)) + (1-x^2)(P'(x)+\lambda Q'(x)) \\
&= (nx+1)P(x) + \lambda(nx+1)Q(x) + \\
&\qquad (1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x) \\
&= (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x) + \\
&\qquad \lambda\Big((nx+1)Q(x) + (1-x^2)Q'(x)\Big) \\
&= T_n(P)(x) + \lambda T_n(Q)(x) \\
T_n(P+\lambda Q)(x) &= (T_n(P) + \lambda T_n(Q))(x).
\end{aligned}$$

Donc $T_n(P+\lambda Q) = T_n(P) + \lambda T_n(Q)$.

$$\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2–b)

Notons P_k le polynôme $x \longmapsto x^k$.

$$\begin{aligned}
& \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \\
T_n(P_k)(x) &= (nx+1)x^k + (1-x^2)kx^{k-1} \\
&= (n-k)x^{k+1} + x^k + kx^{k-1} \\
&= kx^{k-1} + x^k + (n-k)x^{k+1} \\
T_n(P_k)(x) &= kP_{k-1}(x) + P_k(x) + (n-k)P_{k+1}(x) \\
T_n(P_0)(x) &= nx+1 \\
T_n(P_n)(x) &= x^n + nx^{n-1}.
\end{aligned}$$