



EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 .

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ , le système

$$\begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ , les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_n P$ définie sur \mathbb{R} par

$$T_n P(x) = (nx + 1)P(x) + (1 - x^2)P'(x).$$

- a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_n P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1, X, \dots, X^n$ où X^k désigne, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.
- c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.
- d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n , déterminer simplement une valeur propre de T_n .

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n .

a) Etant donné un réel λ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que $\frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}$.

- b) Montrer que si les nombres $h = n + 1 - \lambda$ et $k = n - 1 + \lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n - 1) \leq \lambda \leq n + 1$.
- c) Pour $n = 3$ quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions?
- d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h , définie sur $] - 1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x) \exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ ?
- e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P , modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement : on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n + 1$,

et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

- A_n l'événement : les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne face,
- B_n l'événement : les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne pile,

et on pose $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3 .
b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n .

c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} / A_n), \quad P(A_{n+1} / B_n), \quad P(B_{n+1} / A_n), \quad P(B_{n+1} / B_n).$$

d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q (x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.

a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

b) On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,

$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n , puis de u_n , en fonction de n, α et β .

d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n .



ANNALES DE MATHÉMATIQUES 1998

HEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

1-a) i)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 & L_2 \leftarrow L_4 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 & L_3 \leftarrow L_2 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 & L_4 \leftarrow L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \mu L_1 - 2L_2 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 - \mu L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \left. \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases} \right\} (S_0) \\ & \left. \begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0. \end{cases} \right\} (S_1) \end{aligned}$$

ii) Résolution du sous-système (S₁).

Si $\mu = 0$, le système proposé équivaut à $\begin{cases} 3x_1 & = 0 \\ 3x_4 & = 0 \end{cases}$ i.e $x_1 = x_4 = 0$.

Si $\mu \neq 0$, on effectue $L_3 \leftarrow 2\mu L_3 + (3 - \mu^2)L_4$; le système proposé équivaut alors à

$$\begin{cases} (-4\mu^2 + (3 - \mu^2)^2)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} (3 - \mu^2 + 2\mu)(3 - \mu^2 - 2\mu)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation, le coefficient de x_4 est $(\mu + 1)(\mu - 3)(\mu - 1)(\mu + 3)$. Donc

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\} \implies x_4 = 0$, donc $x_1 = 0$ car $\mu \neq 0$.
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Alors la première équation de (S₁) est satisfaite, il ne reste que la seconde, qui donne $x_1 = \frac{3 - \mu^2}{2\mu} x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$.

iii) Résolution du système

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, deux cas se présentent ;
- 1. $\mu = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sans difficultés.
- 2. $\mu \neq 0$, alors

le système (\mathbf{S}_1) donne $x_1 = x_4 = 0$ (on vient de le voir).

Le système (\mathbf{S}_0) donne alors $\mu x_2 = \mu x_3 = 0$, soit $x_2 = x_3 = 0$ **car** $\mu \neq 0$.

Conclusion : on a dans ce cas $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$,

le système \mathbf{S}_1 donne $x_1 = \frac{3 - \mu^2}{2\mu} x_4$, avec $x_4 \in \mathbb{R}$ d'après **ii**).

Le système \mathbf{S}_0 donne alors

$$x_2 = -\mu x_1 = \frac{\mu^2 - 3}{2} x_4 \text{ et } x_3 = -\mu x_4.$$

Donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{x_4 \left(\frac{3 - \mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2 - 3}{2}, -\mu, 1 \right) / x_4 \in \mathbb{R}\}$.

En résumé :

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$, le système est de Cramer ; il n'admet que la solution triviale $(0, 0, 0, 0)$.
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$, l'ensemble \mathcal{S}' des solutions du système est :

$$\mathcal{S}' = \{x_4 \left(\frac{3 - \mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2 - 3}{2}, -\mu, 1 \right) / x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

1-b)

La matrice du système précédent est $S = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}$.

La matrice A correspond à $\mu = 1$.

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}. \text{ Elle correspond à } \mu = 1 - \lambda.$$

$A - \lambda I$ non inversible \iff Le système n'est pas de Cramer

$$\iff 1 - \lambda \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \lambda = -3 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = -1 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = 1 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 4 & \text{ou} \\ \lambda = 2 & \text{ou} \\ \lambda = 0 & \text{ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Détermination des sous-espaces propres.

Notons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ

- $E_4(A)$ correspond à $\mu = -3$. Donc

$$E_4(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \text{ posons } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_2(A)$ correspond à $\mu = -1$. Donc

$$E_2(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \text{ posons } V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_0(A)$ correspond à $\mu = 1$. Donc

$$E_0(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \text{ posons } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_{-2}(A)$ correspond à $\mu = 3$. Donc

$$E_{-2}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \text{ posons } V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : La matrice A admet quatre valeurs propres distinctes, elle appartient à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: elle est diagonalisable.

On conclut que la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) constitue une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

QUESTION-2

2-a)

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

$(nx+1)P(x)$ est de degré $\leq n+1$, $(1-x^2)P'(x)$ aussi, donc $T_n(P)$ également. Le terme en x^{n+1} de $T_n P(x)$ est $n x a_n x^n - n a_n x^{n+1} = 0$.

Conclusion : $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} T_n(P + \lambda Q)(x) &= (nx+1)(P + \lambda Q)(x) + (1-x^2)(P + \lambda Q)'(x) \\ &= (nx+1)(P(x) + \lambda Q(x)) + (1-x^2)(P'(x) + \lambda Q'(x)) \\ &= (nx+1)P(x) + \lambda(nx+1)Q(x) + \\ &\quad (1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x) \\ &= (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x) + \\ &\quad \lambda \left((nx+1)Q(x) + (1-x^2)Q'(x) \right) \\ &= T_n(P)(x) + \lambda T_n(Q)(x) \\ T_n(P + \lambda Q)(x) &= (T_n(P) + \lambda T_n(Q))(x). \end{aligned}$$

Donc $T_n(P + \lambda Q) = T_n(P) + \lambda T_n(Q)$.

T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2-b)

Notons P_k le polynôme $x \mapsto x^k$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \\ T_n(P_k)(x) &= (nx+1)x^k + (1-x^2)kx^{k-1} \\ &= (n-k)x^{k+1} + x^k + kx^{k-1} \\ &= kx^{k-1} + x^k + (n-k)x^{k+1} \\ T_n(P_k)(x) &= kP_{k-1}(x) + P_k(x) + (n-k)P_{k+1}(x) \\ T_n(P_0)(x) &= nx+1 \\ T_n(P_n)(x) &= x^n + nx^{n-1}. \end{aligned}$$

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.