# ANALYSE

## ENONCE DU PROBLEME

**ENONCE−4**

On désigne par $[x]$ la partie entière du réel $x$, c'est-à-dire que l'on a $[x] \in \mathbb{Z}$ et $[x] \leq x < [x] + 1$
Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} [x] \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### PARTIE A

**1)** Déterminer l'ensemble, noté $D$ de définition de $f$ ; sans chercher à dériver, montrer que $f$ est croissante sur $D$. Sur quel sous-ensemble de $D$ est-elle strictement croissante ?

**2)** Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur $D$

**3)** Donner la représentation graphique de $f$ .

### PARTIE B

**1)** Montrer que $\forall a > 0$, $f$ est intégrable sur $[0, a]$.

**2)** Montrer que pour tout entier naturel $k$ non nul

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = k(k+1)\ln(k+1) - k^2 \ln k - k$$

**3)** En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\int_1^n f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n} \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2}$$

**4)** Pour $n \geq 1$,, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln k \leq \Big(\frac{n(n+1)}{2} - 1\Big) \ln n$$

**5) a)** Montrer que pour $n \geq 1$, $\displaystyle\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^n x \ln x dx$ et en déduire

$$\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln k$$

**b)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln k \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^2}{2} \ln n$.


**Jean MALLET et Michel MITERNIQUE**

# CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 4

## CORRIGE–4 :

**PARTIE A**

**1)**

La fonction logarithme est définie sur $]0,+\infty[$ et $f(0)=0$, donc la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$

Remarquons que $\forall x \in ]0,1[,\ [x]=0$, donc sur $]0,1[,\ f(x)=0$ ; $f$ est constante sur $[0,1]$ puisque $f(0)=0$ par définition et $f(1)=[1]\times \ln 1 = 0$ : $\boxed{f \text{ est croissante au sens large sur } [0,1]}$

Remarquons que la fonction partie entière est croissante au sens large sur $\mathbb{R}_+$.

C'est une fonction en escalier, constante sur les intervalles $[n,n+1[$ où $n\in\mathbb{N}$ sur lesquels elle vaut $n$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ ; si $x$ et $y$ sont dans un même intervalle du type $[n,n+1[$, alors $[x]=[y]=n$ ; si $x$ et $y$ ne sont pas dans le même intervalle du type $[n,n+1[$, alors il existe deux entiers distincts $p$ et $q$ (avec par exemple $p<q$) tels que $p\le x<p+1$ et $q\le y<q+1$ . On a $[x\big)=p<q=[y]$.

Finalement $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ w<y\Longrightarrow [x]\le[y]$.

Sur $[1,+\infty[$, la fonction ln est strictement croissante et positive, la fonction partie entière est croissante et positive, donc $f$ est le produit de deux fontions croissantes, positives, donc $f$ est croissante

$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est constante sur } [0,1], \text{ croissante sur } [1,+\infty[, \text{ donc } f \text{ est croissante sur } [0,+\infty[}$

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, $f$ est le produit d'une fonction croissante au sens large (la partie entière) et positive et d'une fonction strictement croissante (le logarithme) et positive, donc $f$ est strictement croissante.

En effet, soit $0\le x<y$, alors $1\le[x]\le[y]$ et $0\le \ln x<\ln y$ . Faisons le produit de ces deux encadrements de nombres positifs ou nuls, il vient $0\le f(x)<f(y)$ (si $[x]<[y]$ c'est évident et si $[x]=[y]$ c'est $\ln x<\ln y$ qui donne le résultat)

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1,+\infty[}$

**2)**

- Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall x\in ]n,n+1[,\ f(x)=n\ln x$, donc $f$ est continue. $f$ est donc continue sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} ]n,n+1[$
- Continuité en $0^+$

Sur $]0,1[,\ f(x)=0$ et $f(0)=0$, donc $f$ est continue en 0 à droite.

- continuité en $n\in\mathbb{N}^*$

$f(n)=[n]\times\ln n = n\ln n$.

Sur $]n-1,n[,\ f(x)=(n-1)\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to(n-1)^-} f(x)=(n-1)\ln n$.

Sur $]n,n+1[,\ f(x)=n\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n\ln n$

Si $n=1$, les deux limites sont égales à $0=f(x)$, donc $f$ est continue en 1.

Si $n\ge 2$, $(n-1)\ln n\ne n\ln n$, donc $f$ est discontinue en $n$.

On peut remarquer que $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=f(n)$, donc $f$ est continue en $n$ à droite et discontinue à gauche.