



PROBLEMES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE-4

On désigne par $[x]$ la partie entière du réel x , c'est-à-dire que l'on a $[x] \in \mathbb{Z}$ et $[x] \leq x < [x] + 1$
Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \begin{cases} [x] \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

PARTIE A

- 1) Déterminer l'ensemble, noté D de définition de f ; sans chercher à dériver, montrer que f est croissante sur D . Sur quel sous-ensemble de D est-elle strictement croissante ?
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D
- 3) Donner la représentation graphique de f .

PARTIE B

- 1) Montrer que $\forall a > 0$, f est intégrable sur $[0, a]$.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel k non nul

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = k(k+1) \ln(k+1) - k^2 \ln k - k$$

- 3) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\int_1^n f(x) dx = - \sum_{k=1}^n \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2}$$

- 4) Pour $n \geq 1$,,, montrer que

$$\sum_{k=1}^n k \ln k \leq \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \ln n$$

- 5) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n x \ln x dx$ et en déduire

$$\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leq \sum_{k=1}^n k \ln k$$

- b) Montrer que $\sum_{k=1}^n k \ln k \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^2}{2} \ln n$.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 4

CORRIGE-4 :

PARTIE A

1) _____

La fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$ et $f(0) = 0$, donc la fonction f est définie sur \mathbb{R}_+ .
Remarquons que $\forall x \in]0, 1[, [x] = 0$, donc sur $]0, 1[, f(x) = 0$; f est constante sur $[0, 1]$ puisque $f(0) = 0$ par définition et $f(1) = [1] \times \ln 1 = 0$: f est croissante au sens large sur $[0, 1]$

Remarquons que la fonction partie entière est croissante au sens large sur \mathbb{R}_+ .

C'est une fonction en escalier, constante sur les intervalles $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$ sur lesquels elle vaut n . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$; si x et y sont dans un même intervalle du type $[n, n+1[$, alors $[x] = [y] = n$; si x et y ne sont pas dans le même intervalle du type $[n, n+1[$, alors il existe deux entiers distincts p et q (avec par exemple $p < q$) tels que $p \leq x < p+1$ et $q \leq y < q+1$. On a $[x] = p < q = [y]$.

Finalement $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, w < y \implies [x] \leq [y]$.

Sur $[1, +\infty[$, la fonction \ln est strictement croissante et positive, la fonction partie entière est croissante et positive, donc f est le produit de deux fonctions croissantes, positives, donc f est croissante

Finalement, la fonction f est constante sur $[0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$, donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, f est le produit d'une fonction croissante au sens large (la partie entière) et positive et d'une fonction strictement croissante (le logarithme) et positive, donc f est strictement croissante.

En effet, soit $0 \leq x < y$, alors $1 \leq [x] \leq [y]$ et $0 \leq \ln x < \ln y$. Faisons le produit de ces deux encadrements de nombres positifs ou nuls, il vient $0 \leq f(x) < f(y)$ (si $[x] < [y]$ c'est évident et si $[x] = [y]$ c'est $\ln x < \ln y$ qui donne le résultat)

f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

2) _____

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in]n, n+1[, f(x) = n \ln x$, donc f est continue. f est donc continue sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty}]n, n+1[$

• Continuité en 0^+

Sur $]0, 1[, f(x) = 0$ et $f(0) = 0$, donc f est continue en 0 à droite.

• continuité en $n \in \mathbb{N}^*$

$f(n) = [n] \times \ln n = n \ln n$.

Sur $]n-1, n[, f(x) = (n-1) \ln x$, donc $\lim_{x \rightarrow (n-1)^-} f(x) = (n-1) \ln n$.

Sur $]n, n+1[, f(x) = n \ln x$, donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n \ln n$

Si $n = 1$, les deux limites sont égales à $0 = f(x)$, donc f est continue en 1.

Si $n \geq 2$, $(n-1) \ln n \neq n \ln n$, donc f est discontinue en n .

On peut remarquer que $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n)$, donc f est continue en n à droite et discontinue à gauche.