ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–5

PARTIE I

Pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

et on note C_n la courbe représentative de C_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On fera la convention habituelle $0^0 = 1$ pour que $f_0(0)$ soit défini.

1) Dresser le tableau de variations de f_n pour $n \geq 1$.

2) Pour tout entier $n \geq 2$, étudier la position de la courbe C_n par rapport à C_{n-1} et vérifier que la point A_n de coordonnées $(n, f_n(n))$ appartient à C_{n-1}.

3) Construire C_1, C_2 et C_3 dans un même repère ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

PARTIE II

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = f_n(n)$

1) Etudier les variations de la suite (u_n). La suite (u_n) est-elle convergente ?

2) a) Montrer que $\forall t \in [0,1], \ \ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$

3) a) Montrer que $\forall n > 0, \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

b) Montrer que $\forall n \geq 2, \ u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)}$

4) Montrer que $\forall n \geq 2, \ \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$; en déduire une majoration de u_n puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

PARTIE III

Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $a \geq 0$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$.

1) Calculer $I_0(a)$ et $I_1(a)$.

2) Montrer que $\forall t \geq 0$ et $n > 0$, on a $0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n!}$. En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3) a) Montrer que $\forall n > 0, \ \dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$

b) En déduire une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(a)$

4) Etablir une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ pour $n \geq 1$ et en déduire

$$\forall n \geq 2,\ I_n(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a} \times (1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!})$$

5) En déduire que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente et en donner sa somme.