ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–6

L'objet de ce problème est l'étude d'approximations de $x \longmapsto \ln(1+x)$ par des fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ sur l'intervalle $I = [0,1]$.

Dans la suite, on considère pour tout réel a la fonction f_a de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax$$

PARTIE A

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_1(a,b) = \int_0^1 (\ln(1+x) - ax - b)^2 dx$$

1)–a) Etant donné deux réels B et C, on demande de déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque x décrit $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur de la variable x qui réalise ce minimum :

$$x^2 - 2Bx + C$$

b) Etant donné une application continue g de I dans $\mathbb{R}$, en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque b décrit $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur de b qui réalise ce minimum :

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$$

2) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx \ ; \ \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx \ ; \ \int_0^1 x\ln(1+x)dx$$

3) On pose :

$$F_1(a) = \int_0^1 f_a^2(x)dx - \left(\int_0^1 f_a(x)dx\right)^2$$

a) Expliciter $F_1(a)$.

b) Déterminer le minimum de F_1 ainsi que la valeur du réel a qui le réalise.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_1 de l'expression $N_1(a,b)$ ainsi que la valeur du couple (a,b) qui le réalise.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_2(a,b) = \max_{0 \le x \le 1} |\ln(1+x) - ax - b|$$

1) Pour toute application g continue de I dans $\mathbb{R}$, on note :

$$M(g) = \max_{0\le x\le 1} g(x) \ ; \ m(g) = \min_{0\le x\le 1} g(x) \ ; \ \mu(g) = \max_{0\le x\le 1} |g(x)|$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

En utilisant des réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) = M(g)$ et $g(x_2) = m(g)$ (on en établira l'existence), établir que pour tout nombre réel b, on a

$$\begin{cases} \mu(g-b) = \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b = \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \\ \mu(g-b) > \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b \neq \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \end{cases}$$

2)−a) Prouver que la dérivée de la fonction f_a s'annule sur I si et seulement si le réel a appartient à un intervalle $[\alpha, \beta]$ que l'on précisera.

b) En déduire les variations de la fonction f_a en distinguant les trois cas : $a < \alpha$; $\alpha \leq a \leq \beta$ et $a > \beta$.

3) On pose

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a)$$

Expliciter l'expression de $F_2(a)$ en fonctions des valeurs de a. Etudier la continuité et la dérivabilité de F_2 et tracer sa courbe représentative.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_2 de l'expression $N_2(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

5) Vérifier l'inégalité suivante : $K_1 \leq K_2^2$ (on donne $\ln 2 \cong 0.69$).

Etait-elle prévisible ?

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 5

CORRIGE–6 :

PARTIE A

1– a)

Notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2Bx + C$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une application polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2(x - B)$; ce qui permet de dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$	B	$+\infty$
$f'x)$	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Il apparaît clairement que f admet au point $x = B$ un minimum et ce minimum vaut $f(B) = B^2 - 2B^2 + C = C - B^2$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (g(x)-b)^2 dx &= \int_0^1 (g^2(x) - 2bg(x) + b^2)dx \\
&= \int_0^1 g^2(x)dx - 2b\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 b^2 dx \ \text{ par linéarité de l'intégration} \\
&= \int_0^1 g^2(x)dx - 2b\int_0^1 g(x)dx + b^2 \\
&= b^2 - 2b\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^2(x)dx
\end{aligned}$$

On est ramené à la question **a)** dans laquelle $x = b$.

> l'expression $\displaystyle\int_0^1 (g(x)-b)^2 dx$ est minimum pour $b = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ et la valeur du minimum est $\displaystyle\int_0^1 g^2(x)dx - \Big(\int_0^1 g(x)dx\Big)^2 \geq 0$; cette valeur est ≥ 0 car $\forall b \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^1 (g(x)-b)^2 dx \geq 0$ (les bornes sont dans l'ordre croissant)

2)

• Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln est $x \longmapsto x\ln x - x$; on vérifie facilement qu'une primitive de $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$ est $x \longmapsto (x+1)\ln(1+x) - (x+1)$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = [(x+1)\ln(1+x) - (x+1)]_0^1 = \boxed{2\ln 2 - 1}$$

• Faisons une intégration par parties :

posons $u(x) = (\ln(1+x))^2$; $u'(x) = 2\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$; $v'(x) = 1$ et $v(x) = x + 1$. On remarque que les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx &= [(x+1)(\ln(1+x))^2]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{(x+1)\ln(1+x)}{x+1}dx \\
&= 2\ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= 2\ln^2 2 - 2(2\ln 2 - 1) \quad \text{d'après le point précédent} \\
&= 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)
\end{aligned}$$