



ESCL 1998

Mathématiques I Option Economique

Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée \ln .

1. Soit $x \in [-1; 1[$.

a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[-1; 1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} et tout t de $[-1; x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

c) Etablir, pour tout n de \mathbb{N} :

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

d) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pice équilibrée jusqu' l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.
 - a) Calculer A^2 et A^3 .
 - b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.
 - c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.
 - d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On note, pour tout réel a , $M(a) = I + 2aA + 2a^2A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit \mathbb{R} .
 - a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient E .
 - b) En déduire que, pour tout réel a , $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.
3. Soit a un réel non nul.
 - a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
 - b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé à la valeur propre 1.
 - c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

- a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?
- b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement

" les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ième}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ième}}$ est verte ".

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVV BVBB \dots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2.
 - a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
 - b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
 - c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4.
 - a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y .
 - b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
5.
 - a) Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).
 - b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

1-a) Pour $t \in [-1, 1[$, $\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$. C'est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$ et de premier terme 1.

Cette égalité équivaut à

$$\forall t \in [-1, 1[, \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

1-b)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| &= \left| \frac{t^{n+1}}{1-t} \right| \\ &= \frac{|t^{n+1}|}{|1-t|} = \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \quad \text{car } 1-t > 0. \end{aligned}$$

Or $t \in [-1, x] \iff -1 \leq t \leq x \iff -x \leq -t \leq 1 \iff 0 < 1-x \leq 1-t \leq 2$ (on a ajouté 1 aux trois termes de l'encadrement) et l'on sait que $x < 1$.

On prend les inverses (inégalités entre nombres > 0), on obtient :

$0 < \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ et l'on multiplie les trois termes par $|t|^{n+1} \geq 0$. Finalement

$$\frac{|t^{n+1}|}{1-t} \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

$$\text{En résumé, } \forall x \in [-1, 1[, \forall t \in [-1, x], \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

1-c)

On envisage 2 cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.

- $x \geq 0$.

On intègre l'inégalité précédente entre 0 et x . Les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \leq \int_0^x \frac{|t|^{n+1}}{1-x} dt \quad \text{or } t \in [0, x] \implies t \geq 0, \quad \text{donc}$$

$$\int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} dt, \quad \text{soit}$$

$$\int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$

Or $0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^{n+2} \leq 1$. On divise cette inégalité par $(n+2)(1-x) > 0$ et l'on obtient :

$$\frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)},$$

$$\text{donc } \int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}. \quad (1)$$

De plus,

$$\left| \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right) dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \quad \text{inégalité classique}$$

et bornes dans l'ordre croissant

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right) dt &= \left[-\ln(1-t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\ &= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1}, \end{aligned}$$

donc

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \int_0^x \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt$$

et en tenant compte de l'inégalité (1), on obtient

$$\boxed{\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}}.$$

$$\bullet \quad x < 0.$$

On intègre entre x et 0 (les bornes sont alors dans l'ordre croissant).

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right) dt \right| &\leq \int_x^0 \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \\ \int_x^0 \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right) dt &= - \left[-\ln(1-t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\ &= - \left(-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right); \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| - \left(-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \right| &\leq \int_x^0 \left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| dt \\ \left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| &\leq \int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1-x} dt. \end{aligned}$$