**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **FILIÈRE MP**

**CONCOURS D'ADMISSION 2004**

# COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

## Amortisseurs : étude de quelques systèmes

*Dans de nombreuses situations (automobiles, machines industrielles, constructions anti-sismiques), on souhaite diminuer la réponse d'un système aux vibrations mécaniques de son support. Ce problème est consacré à l'étude de quelques aspects de l'amortissement de ces vibrations mécaniques. Il se compose de quatre parties. La quatrième est totalement indépendante des trois autres. La seconde ne dépend de la première que pour l'application numérique finale.*

*On note $\mathcal{R}(\underline{z})$ la partie réelle d'un nombre complexe $\underline{z}$.*

**Données numériques :**

| | | |
|---|---|---|
| Champ de pesanteur : | $g = 9,81$ | $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ |
| Perméabilité du vide : | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ | $\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$ |

### I. Mouvement sans suspension

Dans cette partie, le système est un solide, assimilé à une masse ponctuelle $M$, simplement posé sur le sol, plan et horizontal. Les mouvements du sol et de la masse sont supposés purement verticaux. L'axe vertical $0\,z$, de vecteur unitaire $\vec{u}_z$, est orienté vers le haut.

À partir de l'instant $t = 0$, le sol est animé de vibrations verticales d'élongation :

$$\vec{z}_s(t) = z_0(1 - \cos\omega t)\,\vec{u}_z$$

**1.a)** Écrire l'équation du mouvement de la masse $M$.

**b)** Montrer qu'il existe deux régimes pour le mouvement de $M$, en fonction des caractéristiques de la vibration. Donner la valeur $a_M$ de l'accélération $a_s(t)$ du sol qui sépare les deux régimes. Préciser le mouvement de $M$ dans le cas où $|a_s(t)| < |a_M|$ à tout instant.

**2)** On suppose maintenant que l'accélération du sol peut dépasser $a_M$ en valeur absolue.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**a)** Montrer que la masse quitte le sol lorsqu'elle atteint une altitude $z_D$ que l'on déterminera.

**b)** En déduire l'altitude maximale $z_M$ atteinte en fonction de $z_0, \omega$ et $g$.

**c)** Calculer la durée de la phase de vol libre comprise entre l'instant du décollage de la masse et celui où elle repasse par l'altitude $z_D$.

**3)** Application : on considère une route imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale 2 m et de hauteur crête-crête 5 cm.

**a)** Quelle est la vitesse maximale à laquelle un véhicule totalement rigide peut parcourir cette route sans décoller ?

**b)** Quelle est la hauteur atteinte par un véhicule roulant à une vitesse de 60 km/h ?

**c)** Pendant combien de temps perd-on totalement le contrôle de ce véhicule ?

## II. Suspension sans amortisseur

**1.** La liaison entre la masse $M$, d'altitude $z_M$, et le sol se fait maintenant par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k$, de longueur à vide $l_0$ et de masse négligeable (figure 1). À l'extrémité inférieure de ce ressort, le contact avec le sol se fait par l'intermédiaire d'une petite masse $m < M$.

Dans cette partie, on néglige tout amortissement.

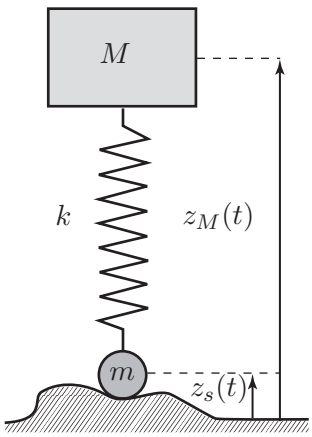



*Figure 1*

À partir de l'instant $t = 0$, la vibration verticale du sol a pour élongation :

$$\vec{z}_s(t) = z_0(1 - \cos \omega t)\, \vec{u}_z$$

**1.a)** En supposant que la masse $m$ reste en contact avec le sol, montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de $M$, s'écrit sous la forme :

$$\ddot{z}_M + \omega_0^2(z_M - l_1) = a(1 - \cos \omega t)$$

où $\omega_0, l_1$ et $a$ sont des constantes à déterminer.

**b)** Résoudre cette équation différentielle en supposant que $z_M(t = 0) = l_1$ et $\dot{z}_M(t = 0) = 0$.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**c)** Soient $z_{M\,\max}$ et $z_{M\,\min}$ respectivement les altitudes maximale et minimale atteintes par la masse $M$ au cours du temps. Montrer que $\Delta z = z_{M\,\max} - z_{M\,\min}$ se met sous la forme $\Delta z = c\dfrac{\omega^2+\omega_0^2}{|\omega^2-\omega_0^2|}z_0$ où $c$ est un facteur numérique que l'on déterminera. Représenter schématiquement $\Delta z$ en fonction de $\omega/\omega_0$.

**2.a)** Établir l'équation du mouvement de la masse $m$.

**b)** En déduire la condition pour que la masse $m$ ne décolle pas du sol.

**c)** Mettre cette condition sous la forme $f(\omega) < K$ où $K = \dfrac{g}{\omega_0^2 z_0}(1+\dfrac{m}{M})$, et $f(\omega)$ est une fonction de $\omega$ de la forme $A\cos\omega_0 t + B\cos\omega t$, $A$ et $B$ étant des coefficients sans dimension que l'on explicitera en fonction de $\omega, \omega_0, m, M$.

**d)** Préciser la valeur maximale de $f(\omega)$ à l'aide des paramètres adimensionnés $X = \omega^2/\omega_0^2$ et $\beta = m/M$. En étudiant les changements possibles de signe de $A$ et $B$, expliciter son expression pour chacune des trois bandes de pulsation que l'on est amené à distinguer, séparées par les valeurs $X_0$ et $X_1$ (avec $X_0 < X_1$) de $X$ que l'on précisera.

**3.** Application numérique : On considère une route de même profil qu'en **I.3** et un véhicule dont la masse suspendue vaut $M = 1280$ kg et la masse non suspendue $m = 160$ kg.

**a)** En régime statique, le ressort se comprime de $\delta l = l_0 - l_1 = 10$ cm sous l'effet de $M$. Calculer numériquement $g/\omega_0^2$ puis la constante $K$.

**b)** Calculer, pour chacune des trois bandes de pulsations obtenues en **II.2.d**, les plages de valeur de $X$ pour lesquelles la condition $f(\omega) < K$ est satisfaite.

**c)** En déduire les plages de vitesse, exprimées en km/h, permises pour que les roues du véhicule restent en contact permanent avec le sol.

**4.a)** Des études montrent qu'une automobile est ressentie comme bien suspendue lorsque la fréquence propre du système est de l'ordre de 1,5 Hz. Les valeurs numériques données plus haut correspondent-elles à ce critère ?

**b)** Que deviennent, pour le paramètre $X$, les plages obtenues en **II.3.b**, lorsque on diminue la masse non suspendue $m$, les autres paramètres restant inchangés ; préciser en particulier les valeurs limites pour $m \to 0$. Un tel allègement est-il favorable ? Si oui, citer des exemples de solutions techniques qu'on peut imaginer dans ce but.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

## III. Suspension avec amortisseur

On ajoute maintenant, en parallèle avec le ressort de suspension, un amortisseur (figure 2) qui exerce sur la masse $M$ une force de type visqueux donnée par

$$\vec{F} = -\gamma \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$$

où $l = z_M - z_m$ est la longueur instantanée du ressort et $\gamma$ une constante. Comme précédemment, la vibration verticale du sol a une élongation donnée à partir de $t = 0$ par :

$$\vec{z}_s(t) = z_0(1 - \cos \omega t)\, \vec{u}_z$$

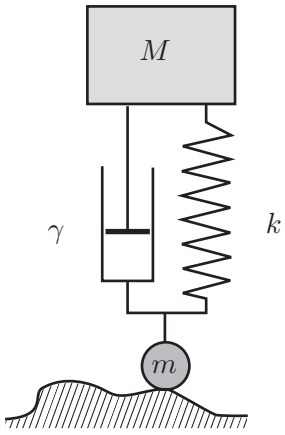



*Figure 2*

**1.a**) Écrire l'équation du mouvement de la masse $M$, dans le cas où $m$ reste en contact avec le sol, à l'aide de $z_m$ et $\dot{z}_m$ et des constantes $\omega_0, l_1$ et $1/\tau = \gamma/M$.

**b)** Montrer que le mouvement de $M$ comporte un régime transitoire qui s'atténue au cours du temps. Donner une description qualitative des divers régimes que l'on peut rencontrer ; les discuter selon la valeur du paramètre $\alpha = 1/\omega_0^2\tau^2$.

**c)** On se place dorénavant en régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire que l'on suppose le régime transitoire achevé. On pose $z_m = \mathcal{R}(\underline{z_m})$ avec $\underline{z_m} = z_0(1 - \exp i\omega t)$ et $Y_M = z_M - l_1 - z_0 = \mathcal{R}(\underline{Y_M})$ ; expliciter en notation complexe $\underline{Y_M}$ en fonction de $z_0, \omega, \omega_0$ et $\tau$.

**d)** On s'intéresse à l'amplitude de vibration de $M$ en fonction de $\omega$. Montrer qu'elle s'exprime, en posant $X = \omega^2/\omega_0^2$, sous la forme :

$$\frac{|\underline{Y_M}|}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + \alpha X}{(1 - X)^2 + \alpha X}}$$

Étudier qualitativement sa variation en fonction de $X$ ; on précisera en particulier les valeurs de $X$ pour lesquelles ce rapport vaut 1. Calculer numériquement la position et le maximum de ce rapport pour $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$.

**e)** En comparant l'amplitude d'oscillation de $M$ en fonction de la fréquence au résultat obtenu en **II.1.c**, quelles améliorations ou inconvénients vous semble apporter l'amortissement ?

**2.** Avec l'amortisseur, la condition pour que, en régime sinusoïdal forcé, la masse non suspendue $m$ demeure en contact permanent avec le sol, se met sous la forme :

$$|F(\omega)| < (1 + \beta) g / z_0 \omega_0^2$$

où $X = \omega^2/\omega_0^2$, $\alpha = 1/\omega_0^2\tau^2$, $\beta = m/M$ et $|F(\omega)| = X\sqrt{\dfrac{(1 + \beta - \beta X)^2 + (1 + \beta)^2 \alpha X}{(1 - X)^2 + \alpha X}}$.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**a)** Avec successivement les deux valeurs $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$ du paramètre d'amortissement, calculer $|F(\omega)|$ pour $X = X_1/2, X_1$ et $2X_1$ où $X_1$ est la valeur de $X$ obtenue en **II.2.d)**.

**b)** On utilise les mêmes données numériques qu'en **II.3** et **II.3.a)**. En comparant les valeurs de $|F(\omega)|$ aux résultats de **II.3.b)**, qu'en concluez-vous sur l'effet bénéfique ou néfaste de l'amortissement aux fréquences élevées ? Pour ces fréquences, quel est, à votre avis, l'élément de l'ensemble non suspendu d'une automobile qui peut améliorer la situation ?

## IV. Amortissement magnétique

Les amortisseurs d'automobiles consistent la plupart du temps en un piston qui se déplace dans un cylindre rempli d'un fluide visqueux.

Le but de cette partie est d'estimer l'efficacité d'un amortissement magnétique.

**1.** On considère un aimant cylindrique d'axe $Oz$, de rayon $r_a$, de longueur $\ell$ et aimanté selon son axe. On assimilera le champ magnétique externe de cet aimant à celui d'un dipôle $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\vec{u}_z$ dirigé selon $Oz$ et situé en son centre.

Cet aimant se déplace dans un tuyau métallique cylindrique vertical d'axe $Oz$, de très grande longueur, de rayon intérieur $R_1 > r_a$ et extérieur $R_2 > R_1$.

On rappelle que le champ magnétique $\vec{B}$ produit au point $\vec{r}(x, y, z)$ par un dipôle magnétique situé en $O$ et aligné avec l'axe $Oz$ est donné par l'expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3z\mathfrak{M}\vec{r} - r^2\mathfrak{M}\vec{u}_z}{r^5}$$

Dans la suite on pourra utiliser soit un système de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ ou cylindriques $(\rho, \varphi, z)$ d'axe $Oz$ de vecteurs unitaires $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$.

**a)** Décrire qualitativement ce qui se passe lorsque l'aimant tombe dans le tuyau sous l'effet de son poids.

**b)** Calculer le flux de ce champ dipolaire $\vec{B}$ à travers un contour circulaire d'axe $Oz$, de rayon $R$ et d'ordonnée $h$ si le dipôle est situé en $O$.

**c)** Calculer la force électromotrice induite à l'instant $t$ sur ce contour si l'aimant en $O$ est animé d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$.

**d)** En déduire que le champ électrique induit dans la direction orthoradiale $\vec{u}_\varphi$, s'écrit :

$$E_\varphi(R, h) = \kappa\, \mathfrak{M} \frac{hR}{(h^2 + R^2)^{5/2}}\, v$$

où $\kappa$ est une constante à déterminer.



Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**e)** En supposant que l'aimant est fixe et le tube en translation verticale à la vitesse $-v$, déterminer la force qui s'exerce dans le tube sur un porteur de charge $q$ en fonction de $v$ et de $\vec{B}$. Comparer au résultat de la question précédente.

**2.** Soit $\sigma$ la conductivité du métal du tuyau. On suppose que la loi d'Ohm locale est vérifiée.

**a)** Quelle est par unité de volume, en fonction de $E_\varphi$ et $\sigma$, la puissance dissipée par effet Joule.

**b)** Calculer la puissance totale dissipée en fonction de $\mathfrak{M}, \sigma, R_1, R_2$ et $v$. On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^5} dx = \frac{5\pi}{128} \frac{1}{a^7}$$

**c)** En déduire la force magnétique qu'exercent ces courants induits sur l'aimant.

A-t-elle l'allure d'une force de frottement visqueux de la forme $-\gamma v$ ?

**3.a)** Exprimer la vitesse limite d'un aimant, de masse volumique $\rho_a$ et de volume $V$, supposé en chute verticale.

**b)** Application numérique. On considère un tuyau en cuivre, de conductivité $\sigma = 5,8 \times 10^7$ S·m$^{-1}$, d'épaisseur notable avec $R_2 = 1,5\, R_1$ ; l'aimant a un rayon $r_a$ voisin de $R_1$, une longueur double de son rayon et une masse volumique $\rho_a = 7,4 \times 10^3$ kg·m$^{-3}$. Son aimantation (moment magnétique par unité de volume) $M_A$ est supposée uniforme et vaut $10^6$ A·m$^{-1}$.

Calculer la vitesse limite de chute.

**4.** Quel doit être l'ordre de grandeur du volume de l'aimant pour obtenir un temps d'amortissement $\tau$ (cf. **III.1.a**) de 0,1 s avec $M = 1280$ kg. On prendra comme dans l'application numérique précédente un cylindre avec $r_a \cong R_1$ et un tube avec $R_2 = 1,5\, R_1$ ? Commenter la faisabilité d'un amortisseur de ce type pour une automobile.

* *
*

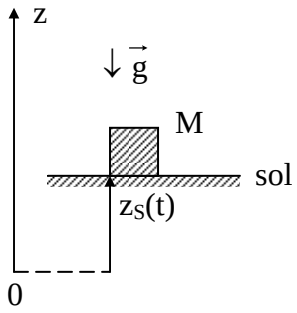


Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**X MP 2004 (Physique)**

# Amortisseurs : étude de quelques systèmes

## I. Mouvement sans suspension




**1) a)** Plaçons-nous dans le référentiel ($R_S$) lié au sol, non galiléen.

L'équation du mouvement de la masse s'écrit dans ($R_S$) :

$$M\ddot{z}' = -Mg + N + Fi_e, \text{ avec :}$$

$$Fi_e = -Ma_e = -M\ddot{z}_S = -M z_O w^2 \cos wt$$

(N réaction normale, en l'absence de mouvement dans le plan du sol).

Ainsi : $\boxed{M\ddot{z}' = -Mg + N - Mz_O w^2 \cos wt}$

**b)** On a : $\begin{cases} N = O \text{ pour } z' > O \text{ (décollement)} \\ N \geq O \text{ pour } z' = O \text{ (contact)} \end{cases}$

Le contact impose donc : $Mg + Ma_S \geq O \Rightarrow a_S \geq -g = a_M$ , $\forall t$

Soit : $\boxed{|a_S| \leq |a_M| = g, \forall t}$ $(r_O w^2 \leq g)$

**c)** Pour $z_O w^2 \geq g$, il y a décollement à l'instant $t_D$ tel que :

$$z_O w^2 \cos(wt_D) = -g \Rightarrow \cos wt_D = \frac{-g}{z_O w^2} < 0$$

(Le décollement a bien sûr lieu lorsque $\dot{z}_S < 0$).

A cet instant : $\boxed{z_D = z_O(1 - \cos(wt_D)) = z_O + \frac{g}{w^2}}$

**d)** Dans (R) galiléen, il y a conservation de l'énergie de la masse après décollement :

$$\frac{1}{2} m\dot{z}_S^2(t_D) + mgz_D = mgz_M \text{ , avec : } \dot{z}_S(t_D) = z_O w \sin(wt_D)$$


© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

D'où : $$z_M = z_D + \frac{z_O^{\,2} w^2}{2g} \underbrace{\sin^2(wt_D)}_{\left[1-\left(\frac{g}{z_O w^2}\right)^2\right]}$$

Soit : $$\boxed{z_M = z_O + \frac{g}{2w^2} + \frac{z_O^{\,2} w^2}{2g}}$$

**e)** Pendant la phase de vol libre, l'équation du mouvement de la masse dans (R) est :

$$\overset{o}{z}^{\,2} = 2g\,(z_M - z) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{\sqrt{(z_M - z)}} = \sqrt{2g}\;dt \text{ pendant la phase ascendante } (\overset{o}{z} \geq 0)$$

Si $t_O$ est la durée de vol libre, on a donc :

$$\int_{z_D}^{z_M} \frac{dz}{\sqrt{(z_M - z)}} = \sqrt{2g}\left(\frac{t_O}{2}\right)$$

D'où : $$\boxed{\begin{aligned} t_O &= \frac{4}{\sqrt{2g}}\sqrt{z_M - z_D} \\ &= \frac{2 z_O w}{g}\sqrt{1-\left(\frac{g}{z_O w^2}\right)^2} \end{aligned}}$$

**3) a)** "Analogie" : $\begin{cases} 2\,z_O = 5 \text{ cm} \\ w = \dfrac{2\Pi v}{\lambda}, \; \lambda = 2 \text{ m (période des bosses)} \end{cases}$

La condition de non-décollement est donc :

$$z_O\left(\frac{2\Pi v}{\lambda}\right)^2 \leq g \;\Rightarrow\; \boxed{v \leq \frac{\lambda}{2\Pi}\sqrt{\frac{g}{z_O}} = 6{,}3 \text{ ms}^{-1} = 23 \text{ kmh}^{-1}}$$

**b)** Pour v = 60 kmh$^{-1}$, il y a donc décollement, avec :

$$\boxed{z_m = 11 \text{ cm}}$$

**c)** La perte de contrôle du véhicule correspond à la phase de "vol libre" :

$$t_O = \frac{2 z_O w}{g}\sqrt{1-\left(\frac{g}{z_O w^2}\right)^2}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.