Corrigés des épreuves de mathématiques s voies scientifique et

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

1/4

s 2006
pécifiques à l'EM Lyon, économique

Grandchamp (Versailles).

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\left|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda \cos a\right| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$ et $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}} \, \mathrm{d}t$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

2.a. Montrer, pour tout $u \in [0\,;+\infty[$: $0 \leqslant (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\quad \forall j \in [\![1; n-1]\!], \quad f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\mathrm{id}$.

a. Vérifier : $\quad g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0\,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^t C$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

Problème I

Préliminaires

1. a. On sait que pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $t^\alpha = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{\beta t})$, c'est ce qu'on appelle naïvement les « croissances comparées » ; En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T^{\frac{n+2}{2}} = \underset{T\to+\infty}{o}(e^T)$ ce qui s'écrit : $\lim_{T\to+\infty} \frac{T^{\frac{n+2}{2}}}{e^T} = 0$. En posant $t = \sqrt{T}$, on obtient donc $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{n+2}}{e^{t^2}} = 0$, c'est à dire

$$\boxed{t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

b. Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1,+\infty[$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ étant convergente (coefficient > 1) et $t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question précédente), on peut donc déduire du critère de négligeabilité des intégrales impropres que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente. Le changement de variable $u = -t$ appliqué à l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ prouve que $\int_{-\infty}^{-1} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente ; enfin, par continuité de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ sur $[-1;+1]$, on sait que $\int_{-1}^{1} t^n e^{-t^2}\,dt$ existe. On déduit de tout cela que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

2. On vient de montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt$ converge. Soit alors n un entier naturel et $(a_0, \ldots, a_n)$ une suite de réels, on déduit de ce qui précède que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) e^{-t^2}\,dt$ converge. Ceci prouve que si P est un polynôme à coefficients réels, alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

3. a. Soient A et B deux réels, on intègre par parties $\int_A^B t^{n+2}e^{-t^2}\,dt$ en utilisant les deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:
$u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-t^2}$ dont les dérivées sont : $u' : t \mapsto (n+1)t^n$ et $v' : t \mapsto te^{-t^2}$, on obtient immédiatement : $\int_A^B t^{n+2}e^{-t^2}\,dt = \frac{-B^{n+1}e^{-B^2} + A^{n+1}e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n e^{-t^2}$ En utilisant le résultat du 1°a), et le résultat du 1°b) on voit que l'on peut faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n \text{ converge}}$$

b. Soit p un entier naturel et soit A un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est continue et impaire sur $[-A,+A]$ donc $\int_{-A}^{A} t^{2p+1}e^{-t^2}\,dt = 0$ et puisque cette intégrale a pour limite I_{2p+1} lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

4. Par récurrence bien sûr ! La propriété est vrai pour $p = 0$ car c'est l'énoncé qui le dit... Supposons-la vraie pour un entier p quelconque, fixé et positif, on a alors :
$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+1)}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2}\frac{(2p)!}{2(p+1)2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$
C'est à dire $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi} = \frac{[2(p+1)]!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.
Le théorème de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel p,

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}$$

Partie I

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$
donc $(t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2} = t^4e^{-t^2} - 2(x+y)t^3e^{-t^2} + (x^2+4xy+y^2)t^2e^{-t^2} - 2xy(x+y)te^{-t^2} + x^2y^2e^{-t^2}$
et en intégrant les deux membres par rapport à la variable t, sachant que toutes les intégrales convergent d'après la question 2°) des préliminaires, on obtient :
$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0$ On peut alors utiliser le résultat de la question 3°)c) des préliminaires, cela donne :
$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} - 2(x+y)0 + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} - 2xy(x+y)0 + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}$
c'est à dire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}}$$

2. D'après ce qui précède, F est une fonction polynôme ; elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et elle a donc des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 qui sont :
$\frac{\partial F}{\partial x} : (x,y) \mapsto x + 2y + 2xy^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y} : (x,y) \mapsto 2x + y + 2x^2y$

3. On sait que, F étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, tout extremum de F ne pourra être obtenu qu'en un point critique de F. On est donc amené à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 2xy^2 & = & 0 \\ 2x + y + 2x^2y & = & 0 \end{array}\right.$$

On constate que dans ce système, $(x = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$ et que $(x,y) = (0,0)$ est une solution particulière de ce système. On cherche les autres solutions de ce système, c'est à dire qu'on suppose maintenant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$; En multipliant la première ligne par x et la seconde par y on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ 2xy+y^2+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ x^2 &= y^2 \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

On note alors qu'on ne peut avoir $x=y$ car sinon (L_1) devient $x^2(3+2x^2)=0$ qui n'est pas possible pour $x\neq 0$ Un système équivalent est donc :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -x^2+2x^4 &= 0 \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

et puisque $x\neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{1}{2} \quad (L_1) \\ x &= -y \quad (L_2-L_1) \end{cases}$$

les points critiques de F sont donc, en rajoutant la solution $(0,0)$:

$$\boxed{(0,0);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

F étant de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on sait que l'on peut tester si ces points sont des abscisses d'extrema en calculant le célèbre « $rt-s^2$ »où, en tout point (x,y) on a :
$r=\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}(x,y)=1+2y^2$, $s=\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=2+4xy; t=\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}(x,y)=1+2x^2$.
On peut résumer les résultats dans un tableau :

	r	s	t	$rt-s^2$
(0,0)	1	2	1	-1
$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4
$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4

Compte tenu du signe de $rt-s^2$ et du signe de r, on déduit que $(0,0)$ est un point selle de F et que :

$$\boxed{F \text{ présente un minimum local en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ dont la valeur commune est } \frac{1}{2}}$$

Partie II

1. Pour tout réel x, les fonctions $t\mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t\mapsto t\cos(xt)e^{-t^2}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $|\sin(xt)e^{-t^2}|\leqslant e^{-t^2}$ et $|t\cos(xt)e^{-t^2}|\leqslant te^{-t^2}$. Mais d'après le 2°) des préliminaires, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}\,dt$ convergent, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t^2}\,dt$ convergent. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet alors de conclure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ convergent absolument et sont donc convergentes.

2. Soit $a\in\mathbb{R}$; Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h:t\mapsto\sin(a+t)$. Cette fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $|h"(t)|=|-\sin(a+t)|\leqslant 1$; on peut donc appliquer, pour tout réel λ la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour h entre 0 et λ : $|g(\lambda)-g(0)-g'(0).\lambda)|\leqslant 1.\dfrac{|\lambda-0|^2}{2}$, c'est à dire :

$$\boxed{|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\cos(a).\lambda)|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}}$$

3. a. $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall h\in\mathbb{R}$, appliquons ce résultat en remplaçant a par xt et λ par xh ; on obtient : $|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|\leqslant\dfrac{x^2h^2}{2}$ et puisque toutes les intégrales convergent :

$$\begin{aligned} |S(x+h)-S(x)-hC(x)| &= \left|\int_0^{+\infty}\sin((x+h)t)\,e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}ht\cos(xt)e^{-t^2}\,dt\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty}[\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)]\,e^{-t^2}\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|e^{-t^2}\,dt \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{x^2h^2}{2}e^{-t^2}\,dt \text{ (cette intégrale converge bien !)} \\ &\leqslant \frac{x^2h^2\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $h\neq 0$: $\left|\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right|\leqslant\dfrac{x^2|h|\sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve, par le théorème d'encadrement des limites, que :

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)=0}$$

b. Bien sûr, il s'en suit que $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=C(x)$; la fonction S est donc dérivable en tout réel x avec :

$$\boxed{S'(x)=C(x)}$$

4. a. Intégrons par parties l'intégrale $C(x)$ à l'aide des fonctions de classe C^1 $u:t\mapsto-\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v:t\mapsto\cos(xt)$, cela donne : $\forall A\in\mathbb{R}^+$,
$\displaystyle\int_0^A t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=\int_0^A u'(t)v(t)\,dt=[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\cos(xt)]_0^A-\frac{x}{2}\int_0^A\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$
La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et la fonction $t\mapsto\cos(xt)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\lim_{A\to+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)=0$$

Les intégrales dans les deux membres ont des limites lorsque $A\to\infty$ d'après II.1., on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty}t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=[\frac{1}{2}e^0\cos(0)]-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$$

c'est à dire :

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)$$

b. La fonction $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2}S(x) + S'(x)\right) &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2}S(x) + C(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2}S(x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut résumer sous la forme

$$\left(2e^{\frac{t^2}{4}} S(t)\right)' = e^{\frac{t^2}{4}}$$

Les fonctions dans étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut les intégrer sur $[0, x]$ pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Cela donne :

$$2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - 2e^{\frac{0^2}{4}} \underbrace{S(0)}_{=0} = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt$$

Soit enfin $\boxed{2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt}$

c. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$, on obtient : $\boxed{S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt}$

et en reportant dans l'égalité du 4.a. : $\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\, dt}$

Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{1}{1+x^2t^2} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2} \leqslant e^{-t^2}$, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ converge d'après le préliminaire ; ainsi, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet de conclure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\, dt$ converge.

2. a. $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $(1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$; or $0 \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1$ donc :

$$\boxed{0 \leqslant (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leqslant u^3}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x^2t^2 \geqslant 0$; en en déduit immédiatement en posant $u = x^2t^2$ et en multipliant les 3 membres de l'inégalité par e^{-t^2} que :

$0 \leqslant (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} \leqslant x^6t^6e^{-t^2}$. Mais les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\, dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6t^6e^{-t^2}\, dt$ convergent d'après le préliminaire et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\, dt$ converge d'après la question précédente. On peut donc intégrer l'encadrement sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\, dt \leqslant x^6 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^6e^{-t^2}\, dt}_{I_6}$ c'est à dire, compte tenu du 3.c. du préliminaire : $\boxed{0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\, dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6}$

3. Et puisque toutes les intégrales en présence sont convergentes, on obtient en utilisant la linéarité de l'intégration :
$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\, dt + x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4e^{-t^2}\, dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$, c'est à dire :
$0 \leqslant I_0 - x^2I_2 + x^4I_4 - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$ ou encore : $0 \leqslant \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right) - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$.
On divise alors, pour $x \neq 0$ les trois membres de cet encadrement par $|x^5|$ et on obtient

$$0 \leqslant \left|\frac{\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right) - g(x)}{x^5}\right| \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}|x|$$

il s'en suit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right) - g(x)}{x^5} = 0$ que l'on peut écrire :

$$\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right) - g(x) = o(x^5)$$

ou enfin

$$\boxed{g(x) = \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} + 0.x^5\right) + o(x^5)}$$

qui est, par définition, **le** développement limité à l'ordre 5 de g en 0.

Partie IV

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, (2p)! \leqslant t^2 + (2p)!$ donc $0 \leqslant \frac{1}{t^2+(2p)!} \leqslant \frac{1}{(2p)!}$ et puisque $t^{2p} \geqslant 0$:
$0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\, dt$ converge d'après les préliminaires. Donc, d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues, $\boxed{\text{l' intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\, dt \text{ converge}}$

2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ étant continues sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ étant convergentes, on en déduit que :
$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-t^2}\, dt$ d'où enfin : $\boxed{0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}}$. En utilisant le résultat des préliminaires, on en déduit que $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ que l'on écrit : $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}\sqrt{\pi}$.
On utilise alors le fait que la série de terme général $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ est convergente (de somme $e^{\frac{1}{4}}$) et le critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que $\boxed{\sum_{p \geqslant 0} u_p \text{ est convergente}}$