



Corrigés des épreuves ESSEC 2005 Maths I S et Maths II E

Alain Combrouze

Professeur de mathématiques en classes préparatoires scientifiques,
lycée Saint-Louis (Paris) et économiques et commerciales, Prépasup (Paris).

Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document: l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.

Pour toute matrice M , on note tM sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note x_i sa

$$i^{\text{ème}} \text{ coordonnée et } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

On désigne par U une partie non vide de \mathbb{R}^n .

A f fonction continue de U dans \mathbb{R} , et y vecteur de \mathbb{R}^n , on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de \mathbb{R}^n pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y, x \in U)$.

Référence

PARTIE I

Dans cette partie, $n = 1$ et U est un intervalle de \mathbb{R} ; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur \mathbb{R} et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

- 1) Lorsque U est un segment de \mathbb{R} , montrer que f^* est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Quelques exemples.

Après avoir étudié les variations de F_y , préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

- a) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = a \frac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.
- b) $U = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.
(on pourra introduire le réel β vérifiant : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$).
- c) $U = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

- 3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?

- 4) Plus généralement, on suppose que : $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur \mathbb{R} telle que l'image de \mathbb{R} par la fonction dérivée est \mathbb{R} tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x) > 0$.

- a) Établir que f' réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
On note g l'application réciproque de f' .
- b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y , associée à f et y , montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^*(x) = xg(x) - f(g(x))$.
Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g .
- c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x \mapsto xy - f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^* = f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

- 1) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.
 - a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$.
 - b) Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1\}$?
 - c) Lorsque $\|y\| \leq 1$, montrer que : $F_y(x) \leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^* .
- 2) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On rappelle que : $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle$.

- 2) On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur \mathbb{R}^n par $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$.

- a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :
 $\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A .
- b) Pour x et h deux vecteurs de \mathbb{R}^n , exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $\langle h, Ah \rangle$ et $\langle h, y - Ax \rangle$ et établir que : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$.
- c) Montrer que, pour tout vecteur y de \mathbb{R}^n , F_y admet un maximum obtenu pour :
 $x = A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

- 3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ mais dans cette

question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de \mathbb{R}^n .

On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de \mathbb{R}^n , F_y à \mathbb{R}^n en posant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \quad F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}.$$

- a) Existence d'un maximum.
 - Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty$ et en déduire que pour $x_0 \in U$:
il existe r strictement positif vérifiant ($\|x\| \geq r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0)$).
 - Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n et en déduire que : $U(f) = \mathbb{R}^n$.
- b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.
 - Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :
 $F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x) + F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x') \rangle}{8}$.
 - En supposant que \bar{x} et \bar{x}' sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y , montrer que : $f^*(y) < F_y\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de \mathbb{R}^n et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour

U l'ensemble des vecteurs x de \mathbb{R}^n vérifiant : $Bx = c$.

On note $\text{Im } M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n .

On suppose que $c \in \text{Im } B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de \mathbb{R}^n (on ne demande pas de le vérifier).

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de \mathbb{R}^n , F_y admet un unique vecteur \bar{x} appartenant à U et réalisant le maximum de F_y .

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de \bar{x} et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de \bar{x} .

- a) Vérifier que pour tout x, x' de \mathbb{R}^n $\langle x, Bx' \rangle = \langle 'Bx, x' \rangle$.
Montrer que : $\text{Im } 'B \subset (\ker B)^\perp$ en désignant par $(\ker B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.
Justifier l'égalité des dimensions de $\text{Im } 'B$ et de $(\ker B)^\perp$ et en déduire que :

$\text{Im } 'B = (\ker B)^\perp$. (On admettra que : $\text{rg}(B) = \text{rg}('B)$.)

- b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t \langle y - A\bar{x}, h \rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

En déduire que \bar{x} est caractérisé par l'existence de $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\bar{x} = c$ et $y - A\bar{x} = 'B\bar{z}$.

2) Un algorithme de recherche de \bar{x} .

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de \mathbb{R}^n et on définit les suites

$(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + 'Bz_p = 0 \quad \text{et} \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$$

- a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux

$$\text{relations : } A(x_p - \bar{x}) = 'B(\bar{z} - z_p) \quad \text{et} \quad z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x}).$$

- b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 - 2r \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2 \|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

- c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}'BBA^{-1/2}x \rangle$ pour tout x de \mathbb{R}^n .
- Établir que la matrice $A^{-1/2}'BBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de \mathbb{R}^n , on a $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$.

- d) On choisit $r \in \left] 0, \frac{2}{\alpha} \right[$.

Montrer que : $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2) \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle \leq 0$.

En déduire que la suite $(\|z_p - \bar{z}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers \bar{x} .

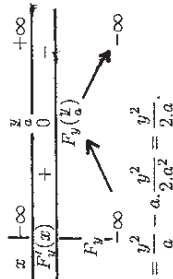
1) $F_y : x \mapsto xy - f(x)$ est continue sur le segment U , donc bornée sur U , et admet un maximum (et un minimum) sur U quelque soit y réel.

f^* est donc définie sur \mathbb{R}

2) a) Soient $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = a \frac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

$$F_y(x) = xy - a \frac{x^2}{2}, \text{ et } F'_y(x) = y - ax.$$

D'où les variations de F_y .



F_y admet un maximum égal à $F_y(\frac{y}{a}) = \frac{y^2}{a} - a \cdot \frac{y^2}{2 \cdot a^2} = \frac{y^2}{2 \cdot a}$.

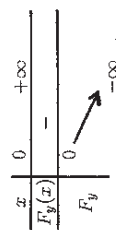
Lorsque $f : x \mapsto a \cdot \frac{x^2}{2}$ et $U = \mathbb{R}$, on a : $U(f) = \mathbb{R}$, et $f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2 \cdot a}$

2) b) Supposons maintenant que $U = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{x^\alpha}{\alpha}$, où $\alpha > 1$.

$$F_y : x \mapsto xy - \frac{x^\alpha}{\alpha}, \text{ et } F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}.$$

D'où la discussion.

1er cas : $y \leq 0$.

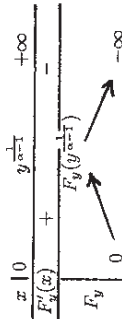


F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$.

2ème cas : $y > 0$.

$$F'_y(x) = 0 \text{ si } x^{\alpha-1} = y, \text{ soit : } x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

D'où le tableau de variation de F_y .



F_y admet un maximum égal à :

$$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y \cdot y^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} (y^{\frac{1}{\alpha-1}})^{\alpha} = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (1 - \frac{1}{\alpha}) y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Introduisons le réel β défini par : $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, c'est-à-dire : $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Le maximum précédent de F_y vaut : $F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1}{\beta} y^{\beta}$. Dans ce cas, il vient : $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$.

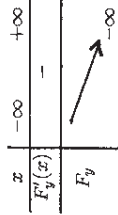
$$\text{Lorsque } U = \mathbf{R}_+^* \text{ et } f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \text{ on obtient : } U(f) = \mathbf{R}_+^* \text{ et } f^*(y) = \frac{y^\beta}{\beta} \text{ pour } y > 0$$

2) c) Supposons que $U = \mathbf{R}$ et $f(x) = e^x$.

$$F_y(x) = x \cdot y - e^x, \text{ et : } F_y'(x) = y - e^x.$$

1er cas : $y \leq 0$.

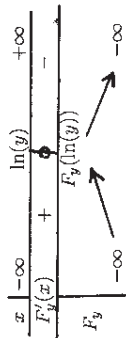
Les variations de F_y sont les suivantes.



F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbf{R}$.

2ème cas : $y > 0$.

$F_y'(x) = 0$ si $e^x = y$, soit : $x = \ln(y)$. On obtient les variations suivantes.



F_y admet pour maximum $F_y(\ln(y)) = y \cdot \ln(y) - e^{\ln(y)} = y \cdot \ln(y) - y = y \cdot (\ln(y) - 1)$.

$$\text{Lorsque } U = \mathbf{R} \text{ et } f(x) = e^x, \text{ on obtient } U(f) = \mathbf{R}_+^*, \text{ et } f^*(y) = y \cdot \ln(y) - y \text{ pour } y > 0$$

3) a) Supposons que $U = \mathbf{R}$ et $f(x) = a \cdot \frac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbf{R}$, et $f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2a}$, de sorte que l'étude de $(f^*)^*$ nous ramène à celle de f^* en changeant a en $\frac{1}{a}$.

$$U(f^*) = \mathbf{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^2}{2a} = a \cdot \frac{y^2}{2}, y \in \mathbf{R}$$

3) b) Supposons que $U = \mathbf{R}_+^*$ et $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbf{R}_+^*$ et $f^*(y) = \frac{y^\beta}{\beta}$, où le réel β est défini par la relation : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Il vient $\beta > 1$ et l'étude de f^* peut se ramener, à encore, à celle de f , en remplaçant le paramètre α par β et en notant que le réel associé à β par la relation $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ n'est autre que α .

$$U(f^*) = \mathbf{R}_+^* \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^\alpha}{\alpha}$$

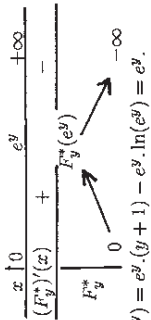
3) c) Supposons que $U = \mathbf{R}$ et $f(x) = e^x$.

On a trouvé : $U(f) = \mathbf{R}_+^*$ et $f^*(x) = x \cdot \ln(x) - x$, pour $x > 0$.

Posons $F_y^*(x) = x \cdot y - f^*(x) = x \cdot y - x \cdot \ln(x) + x = x \cdot (y + 1) - x \cdot \ln(x)$.

$(F_y^*)'(x) = y + 1 - 1 - \ln(x)$, $(F_y^*)'(x) = 0$ si $\ln(x) = y$, soit si $x = e^y$.

D'où les variations de F_y^* .



F_y^* admet un maximum égal à $F_y^*(e^y) = e^y \cdot (y + 1) - e^y \cdot \ln(e^y) = e^y$.

$$U(f^*) = \mathbf{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = e^y \text{ pour } y \in \mathbf{R}$$

On constate sur les trois exemples précédents que $U(f^*) = U$ et que $(f^*)^* = f$.

4) a)

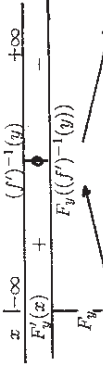
$U(f) = \mathbf{R}$ et $f^* > 0$ sur \mathbf{R} . On conclut que f^* est une bijection continue et strictement croissante de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

4) b) (i) $F_y(x) = x \cdot y - f(x)$ et $F_y'(x) = y - f'(x)$.

$F_y'(x) = 0$ si $x = (f')^{-1}(y)$.

F_y étant décroissante, on a $F_y' > 0$ sur $]-\infty, (f')^{-1}(y)[$ et $F_y' < 0$ sur $](f')^{-1}(y), +\infty[$.

Le tableau de variation de F_y est le suivant :



F_y admet un maximum égal à $F_y((f')^{-1}(y)) = y \cdot (f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)) = y \cdot g(y) - f(g(y))$.

$$U(f) = \mathbf{R} \text{ et } f^*(y) = y \cdot g(y) - f(g(y))$$

(ii) f^* est une bijection dérivable de \mathbf{R} sur \mathbf{R} dont la dérivée $f^{*'} n'est nulle en aucun point de \mathbf{R} .$

La bijection réciproque $g = (f^*)^{-1}$ est donc dérivable sur \mathbf{R} , et : $\forall y \in \mathbf{R}, g'(y) = \frac{1}{f^{*'}(g(y))} \text{ si } y = f(x)$.

$y \mapsto f(g(y))$ est dérivable sur \mathbf{R} comme composée de fonctions dérivables.

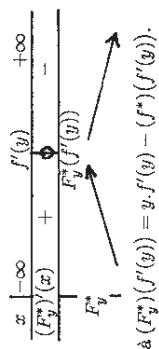
$$f^* : y \mapsto y \cdot g(y) - f(g(y)) \text{ est aussi dérivable sur } \mathbf{R}$$

(iii) $\forall y \in \mathbf{R}, (f^*)'(y) = g(y) + y \cdot g'(y) - f'(g(y)) \cdot g'(y)$.

Comme $g = (f^*)^{-1}$, il vient : $f'(g(y)) = y$, et $(f^*)'(y) = g(y)$.

$$\text{Finalement : } (f^*)' = g$$

4) c) Soit $F_y^* : x \mapsto x \cdot y - (f^*)'(x) = x \cdot y - x \cdot g(x) + f(g(x))$, avec $x \in \mathbb{R}$.
 $(F_y^*)'(x) = y - g(x) - x \cdot g'(x) + f'(g(x))$, $g'(x) = y - g(x)$, puisque $f'(g(x)) = x$.
 $(F_y^*)'(x) = 0$ si $g(x) = y$, soit $x = g^{-1}(y) = f'(y)$.
 $g = (f')^{-1}$, a même sens de variation que f' et est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $(F_y^*)'$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$, et > 0 sur $]-\infty, f'(y)[$ puis < 0 sur $]f'(y), +\infty[$.
D'où les variations de F_y^* .



F_y^* admet donc un maximum égal à $(F_y^*)'(f'(y)) = y \cdot f'(y) - (f^*)'(f'(y))$.
Soit $(F_y^*)'(f'(y)) = y \cdot f'(y) - f'(y) \cdot g(f'(y)) + f(g(f'(y))) = y \cdot f'(y) - f'(y) \cdot y + f(y) = f(y)$.

On conclut que : $\forall y \in \mathbb{R}, (F_y^*)'(y) = f(y)$, donc que $(f^*)'' = f$

1) a) (i) Soit $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$.
 $F_y(ty) = \langle ty, ty \rangle = t \cdot \|y\|^2 = t \cdot \|y\| \cdot \|y\| = t \cdot (\|y\| \cdot \|y\|)$.

$$F_y(ty) = t \cdot \|y\| \cdot (\|y\| - 1)$$

(ii) 1er cas : $\|y\| > 1$.
On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = +\infty$.
2ème cas : $\|y\| \leq 1$.
On obtient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = -\infty$.
3ème cas : $\|y\| = 1$.
On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = 0$.

(iii) Si F_y admet un maximum sur $U = \mathbb{R}^n$, on ne peut pas avoir $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = +\infty$, et donc nécessairement $\|y\| \leq 1$.

$$U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$$

2) b) (i) Supposons $\|y\| \leq 1$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire : $F_y(x) = \langle x, y \rangle = -\|x\| \|y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| = \|x\|$.
Soit : $F_y(x) \leq \|x\| \cdot (\|y\| - 1) \leq 0 = F_y(0)$.

$$\text{Si } \|y\| \leq 1, \text{ on a : } F_y(x) \leq F_y(0)$$

(ii) Lorsque $\|y\| \leq 1$, F_y admet $F_y(0) = 0$ comme maximum, et donc $y \in U(f)$.
Cela se traduit par l'inclusion : $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\} \subset U(f)$.
Compte-tenu de l'inclusion obtenue au 1)a), il vient :

$$U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}, \text{ et } f^*(y) = F_y(0) = 0 \text{ pour } y \in U(f)$$

c) Soit $F_y^* : x \mapsto \langle x, y \rangle - (f^*)'(x) = \langle x, y \rangle - x$, $x \in U(f)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne à nouveau :
 $F_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$, puisque $x \in U(f^*)$ et $\|x\| \leq 1$.
D'autre part : $F_y^*\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|$.

On voit que F_y^* admet pour maximum sur $U(f^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$ la valeur $(F_y^*)\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^n$.

On conclut que : $U(f^*) = \mathbb{R}^n$, et que $(f^*)'(y) = \|y\| = f(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^n$, soit $(f^*)'' = f$

2) a) Assimilons A à un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique, en confondant A et l'endomorphisme que A représente dans la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n .
Cette base canonique est en effet orthogonale pour la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^n .

Il existe alors une base orthonormale (u_1, u_2, \dots, u_n) de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A .
Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres respectivement associées à u_1, u_2, \dots, u_n , en supposant que :
 $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \mu$.
Soit x , un vecteur de \mathbb{R}^n .

Ecrivons : $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot u_k$. Par linéarité : $A \cdot x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot A \cdot u_k$.

$$\langle x, A \cdot x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i, \sum_{k=1}^n x_k \cdot A \cdot u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i \cdot x_k \cdot \langle u_i, A \cdot u_k \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i \cdot x_k \cdot \langle u_i, \lambda_k \cdot u_k \rangle$$

$$\text{Soit : } \langle x, A \cdot x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_i \cdot x_k \cdot \langle u_i, u_k \rangle$$

Comme $\langle u_i, u_k \rangle = 0$ si $i \neq k$ et $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ si $i = k$, il vient :
 $\langle x, A \cdot x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k^2$.

Ensuite, puisque $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \mu$, on obtient :
 $\lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \leq \langle x, A \cdot x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k^2 \leq \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.

Par ailleurs, la base (u_1, u_2, \dots, u_n) étant orthonormale : $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \cdot \|x\|^2 \leq \langle x, A \cdot x \rangle \leq \mu \cdot \|x\|^2$$

2) b) (i) $F_y(x+h) - F_y(x) = \langle x+h, y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{\langle x+h, y \rangle + \langle x, y \rangle}{2} - \langle x, y \rangle = \frac{\langle x+h, y \rangle - \langle x, y \rangle}{2}$.
La bilinéarité du produit scalaire permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 F_y(x+h) - F_y(x) &= \frac{\langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2} - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} \\
 &= \frac{\langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2} \\
 A \text{ étant symétrique, il vient : } \langle x, Ah \rangle &= \langle h, Ax \rangle \\
 D'où : F_y(x+h) - F_y(x) &= \frac{\langle h, y \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_y(x+h) - F_y(x) = \langle h, y - Ax \rangle + \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}}$$

(ii) D'après l'encadrement obtenu au 2)is), on a : $\lambda \cdot \|h\|^2 \leq \langle h, Ah \rangle$.
 Les valeurs propres de A étant strictement positives, on a : $\lambda > 0$, et donc : $\langle h, Ah \rangle \geq 0$.
 D'où : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$.

$$\boxed{\forall (x, y, h) \in (\mathbb{R}^n)^3, F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle}$$

2) c) (i) Remarquons d'abord que A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A .
 Prenons $x = A^{-1}y$ dans l'inégalité précédente.
 $Ax = y$, et $F_y(A^{-1}y + h) - F_y(A^{-1}y) \leq \langle h, y - y \rangle = 0$.
 Soit : $F_y(A^{-1}y + h) \leq F_y(A^{-1}y)$.

Soit alors z , un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n .
 En appliquant l'inégalité précédente avec $h = z - A^{-1}y$, on obtient :
 $F_y(z) \leq F_y(A^{-1}y)$.
 D'autre part :

$$F_y(A^{-1}y) = \frac{\langle A^{-1}y, A \cdot A^{-1}y \rangle}{2} = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2} < \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}$$

$$\boxed{F_y \text{ présente donc un maximum au point } A^{-1}y, \text{ et ce maximum vaut : } F_y(A^{-1}y) = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}}$$

(ii)

$$\boxed{\text{On a : } U(f) = \mathbb{R}^n, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}}$$

(iii) On peut ramener l'étude de f^* à celle de f en remplaçant la matrice A par A^{-1} .
 En effet A^{-1} , inverse de A , est également symétrique, et ses valeurs propres $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sont strictement positives.
 Comme $(A^{-1})^{-1} = A$, on conclut que :

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que : } (f^*)^* : y \mapsto \frac{\langle y, A \cdot y \rangle}{2} = f(y). \text{ Soit : } (f^*)^* = f}$$

• (i) L'inégalité du 2)a) donne : $F_y(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} \leq \frac{\lambda \cdot \|x\|^2}{2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet ensuite d'écrire : $F_y(x) \leq \|y\| \cdot \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$.

Soit : $F_y(x) \leq \|y\| \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right) \|x\|^2$.

Lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, $\|y\| - \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$ tend vers $-\infty$, car y est fixé et $\lambda > 0$.

$$\boxed{D'où : \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty}$$

(ii) Soit x_0 , un élément fixé de U . La définition de la limite donne alors :

$$\boxed{\text{Il existe } r > 0 \text{ tel que } \|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0)}$$

• (i) L'application $\varphi : x \mapsto \|x\|$ est continue (φ est même 1-lipchitzienne d'après l'inégalité : $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \|u - v\|$).

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\} = \varphi^{-1}([-\infty, r])$ est donc un fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, r]$ par φ .

$U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est alors un fermé comme intersection de deux fermés.

(ii) Par ailleurs, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ est une boule de \mathbb{R}^n . C'est une partie bornée de \mathbb{R}^n .
 Comme $U_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$, U_0 est également une partie bornée de \mathbb{R}^n .

$$\boxed{U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n}$$

(iii) F_y est continue sur U_0 , car chacune des applications : $x \mapsto \langle x, y \rangle$ et $\frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ est continue sur U_0 .

Il suffit, pour démontrer ces propriétés de continuité, de considérer les expressions :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \text{ et } \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$$

obtenues en rapportant \mathbb{R}^n à la base orthonormale (u_1, u_2, \dots, u_n) de vecteurs propres de A considérée au 2)a).

Les deux fonctions précédentes sont polynômes en (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Or, une application continue sur une partie fermée bornée de \mathbb{R}^n admet un maximum sur cette partie.
 F_y admet donc un maximum $M = F_y(x_1)$ sur U_0 , atteint en un point x_1 de U_0 .

Par ailleurs, l'implication : $\|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0) < M$ impose $\|x_0\| \leq r$, de sorte que $x_0 \in U_0$.

On obtient : $x \in U, \|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0) \leq F_y(x_1) = M$.

$M = F_y(x_1)$ est donc aussi le maximum de F_y sur U .

$$\boxed{F_y \text{ admet un maximum sur } U \text{ quelque soit } y \in \mathbb{R}, \text{ et } U(f) = \mathbb{R}^n}$$

3) b)

$$\begin{aligned}
 F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x) + F_y(x')}{2} &= \frac{\langle \frac{x+x'}{2}, A \cdot \frac{x+x'}{2} \rangle}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\langle x, Ax \rangle}{2} + \frac{\langle x', Ax' \rangle}{2} \right) \\
 &= \frac{\langle x+x', y \rangle}{2} - \frac{\langle \frac{x+x'}{2}, A \cdot \frac{x+x'}{2} \rangle}{2} > \frac{1}{2} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, Ax \rangle}{4} - \frac{1}{2} \langle x', y \rangle - \frac{\langle x', Ax' \rangle}{4}
 \end{aligned}$$