



# Corrigés des épreuves ESSEC 2005 Maths I S et Maths II E

**Alain Combrouze**

Professeur de mathématiques en classes préparatoires scientifiques,  
lycée Saint-Louis (Paris) et économiques et commerciales, Prépasup (Paris).

Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document: l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### Notations

Dans tout ce problème, on considère  $n$  un entier naturel non nul.

Pour toute matrice  $M$ , on note  ${}^tM$  sa transposée.

On identifie l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ , muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à  $n$  lignes ; ainsi pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $x_i$  sa

$$i^{\text{ème}} \text{ coordonnée et } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique :  $\langle x, y \rangle = {}^t x y$  et la norme euclidienne de  $x$  est définie par :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

On désigne par  $U$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

A  $f$  fonction continue de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $y$  vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , on associe la fonction  $F_y$  définie sur  $U$  par :  $x \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$  et on note  $U(f)$  l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  pour lesquels  $F_y$  admet un maximum.

Lorsque  $U(f)$  est non vide, on appelle fonction conjuguée de  $f$  la fonction notée  $f^*$  définie sur  $U(f)$  par :  $f^*(y) = \max(F_y, x \in U)$ .

Référence

### PARTIE I

Dans cette partie,  $n = 1$  et  $U$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $F_y$  est définie sur l'intervalle  $U$  par  $F_y(x) = xy - f(x)$ .

- 1) Lorsque  $U$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , montrer que  $f^*$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Quelques exemples.

Après avoir étudié les variations de  $F_y$ , préciser  $U(f)$  et  $f^*$  dans les cas suivants :

- a)  $U = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a \frac{x^2}{2}$  où  $a$  est un réel fixé strictement positif.
- b)  $U = \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = a \frac{x^\alpha}{\alpha}$  où  $\alpha$  est un réel fixé strictement supérieur à 1.  
(on pourra introduire le réel  $\beta$  vérifiant :  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ).
- c)  $U = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ .

- 3) Pour chacun des cas précédents, déterminer  $(f^*)^*$  ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?

- 4) Plus généralement, on suppose que :  $U = \mathbb{R}$  et  $f$  est une application de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telle que l'image de  $\mathbb{R}$  par la fonction dérivée est  $\mathbb{R}$  tout entier et vérifiant pour tout  $x$  réel  $f''(x) > 0$ .

- a) Établir que  $f'$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
On note  $g$  l'application réciproque de  $f'$ .
- b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application  $F_y$ , associée à  $f$  et  $y$ , montrer que  $U(f) = \mathbb{R}$  et que :  $\forall x \in \mathbb{R}$   $f^*(x) = xg(x) - f(g(x))$ .  
Justifier la dérivabilité de  $f^*$  et exprimer  $(f^*)'$  en fonction de  $g$ .
- c) Après avoir étudié pour  $y$  réel les variations de l'application :  $x \mapsto xy - f^*(x)$ , en déduire que :  $(f^*)^* = f$ .

### PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

- 1) On suppose dans cette question que :  $U = \mathbb{R}^n$  et  $f(x) = \|x\|$ .
  - a) Pour  $t$  réel strictement positif et  $y \in \mathbb{R}^n$ , calculer  $F_y(ty)$  et préciser  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$ .
  - b) Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles  $U(f)$  et  $\{y \in \mathbb{R}^n, \|y\| \leq 1\}$  ?
  - c) Lorsque  $\|y\| \leq 1$ , montrer que :  $F_y(x) \leq F_y(0)$ . En déduire  $U(f)$  et  $f^*$ .
- 2) Préciser  $(f^*)^*$ .

Dans toute la suite du problème,  $A$  désigne une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$  dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On rappelle que :  $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$   $\langle x, Ax' \rangle = \langle x', Ax \rangle$ .

- 2) On suppose dans cette question que :  $U = \mathbb{R}^n$  et  $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ .

Pour  $y \in \mathbb{R}^n$ , on définit ainsi  $F_y$  sur  $\mathbb{R}^n$  par  $F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$ .

- a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :  $\lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2$  lorsque  $\lambda$  (respectivement  $\mu$ ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de  $A$ .
- b) Pour  $x$  et  $h$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , exprimer  $F_y(x+h) - F_y(x)$  en fonction de  $\langle h, Ah \rangle$  et  $\langle h, y - Ax \rangle$  et établir que :  $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$ .
- c) Montrer que, pour tout vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F_y$  admet un maximum obtenu pour :  $x = A^{-1}y$  et préciser  $U(f)$ ,  $f^*$  et  $(f^*)^*$ .

- 3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire  $f(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$  mais dans cette

question, on suppose que  $U$  est une partie convexe, fermée non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

On prolonge, de façon naturelle et pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F_y$  à  $\mathbb{R}^n$  en posant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \quad F_y(x) = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2}.$$

- a) Existence d'un maximum.
  - Montrer que :  $\forall y \in \mathbb{R}^n$   $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty$  et en déduire que pour  $x_0 \in U$  : il existe  $r$  strictement positif vérifiant  $(\|x\| \geq r \Rightarrow F_y(x) < F_y(x_0))$ .
  - Établir que l'ensemble  $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$  est une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^n$  et en déduire que :  $U(f) = \mathbb{R}^n$ .
- b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.
  - Pour  $x$  et  $x'$  deux vecteurs de  $U$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ , établir la relation :  $F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x) + F_y(x')}{2} = \frac{\langle x-x', A(x-x') \rangle}{8}$ .
  - En supposant que  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de  $F_y$ , montrer que :  $f^*(y) < F_y\left(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')\right)$  puis établir une contradiction.

### PARTIE III

Dans toute cette partie,  $c$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et  $B$  une matrice carrée non nulle à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour

$U$  l'ensemble des vecteurs  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :  $Bx = c$ .

On note  $\text{Im } M$  et  $\ker M$  l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée  $M$  d'ordre  $n$ .

On suppose que  $c \in \text{Im } B$  ; ainsi  $U$  est une partie convexe fermée non vide de  $\mathbb{R}^n$  (on ne demande pas de le vérifier).

D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F_y$  admet un unique vecteur  $\bar{x}$  appartenant à  $U$  et réalisant le maximum de  $F_y$ .

L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de  $\bar{x}$  et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de  $\bar{x}$ .

- a) Vérifier que pour tout  $x, x'$  de  $\mathbb{R}^n$   $\langle x, Bx' \rangle = \langle 'Bx, x' \rangle$ .  
Montrer que :  $\text{Im } 'B \subset (\ker B)^\perp$  en désignant par  $(\ker B)^\perp$  l'orthogonal de la partie  $\ker B$ .  
Justifier l'égalité des dimensions de  $\text{Im } 'B$  et de  $(\ker B)^\perp$  et en déduire que :

$\text{Im } 'B = (\ker B)^\perp$ . (On admettra que :  $\text{rg}(B) = \text{rg}('B)$ ).

- b) Lorsque  $h$  est un vecteur de  $\ker B$  et  $t$  un réel, établir la relation :

$$F_y(\bar{x} + th) - F_y(\bar{x}) = t \langle y - A\bar{x}, h \rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}.$$

En déduire que  $\bar{x}$  est caractérisé par l'existence de  $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$  et vérifiant les deux conditions :  $B\bar{x} = c$  et  $y - A\bar{x} = 'B\bar{z}$ .

2) Un algorithme de recherche de  $\bar{x}$ .

On désigne par  $r$  un réel strictement positif et  $z_0$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et on définit les suites

$(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + 'Bz_p = 0 \quad \text{et} \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$$

- a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations :  $A(x_p - \bar{x}) = 'B(\bar{z} - z_p)$  et  $z_{p+1} - \bar{z} = z_p - \bar{z} + rB(x_p - \bar{x})$ .

- b) Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 = \|z_p - \bar{z}\|^2 - 2r \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle + r^2 \|B(x_p - \bar{x})\|^2.$$

- c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre  $n$  symétrique à valeurs propres strictement positives notée  $A^{1/2}$  et vérifiant  $(A^{1/2})^2 = A$ .

On note  $A^{-1/2}$  la matrice inverse de  $A^{1/2}$ .

- Montrer la relation :  $\|BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}'BBA^{-1/2}x \rangle$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ .
- Établir que la matrice  $A^{-1/2}'BBA^{-1/2}$  est symétrique et que sa plus grande valeur propre  $\alpha$  est strictement positive.
- En déduire que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$ .

- d) On choisit  $r \in \left] 0, \frac{2}{\alpha} \right[$ .

Montrer que :  $\|z_{p+1} - \bar{z}\|^2 - \|z_p - \bar{z}\|^2 \leq r(r\alpha - 2) \langle x_p - \bar{x}, A(x_p - \bar{x}) \rangle \leq 0$ .

En déduire que la suite  $(\|z_p - \bar{z}\|)_{p \in \mathbb{N}}$  est monotone convergente, puis que  $x_p$  converge vers  $\bar{x}$ .

\*\*\*

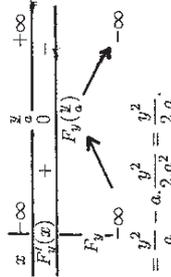
1)  $F_y : x \mapsto xy - f(x)$  est continue sur le segment  $U$ , donc bornée sur  $U$ , et admet un maximum (et un minimum) sur  $U$  quelque soit  $y$  réel.

$f^*$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$

2) a) Soient  $U = \mathbb{R}$  et  $f(x) = a \frac{x^2}{2}$ , où  $a > 0$ .

$F_y(x) = xy - a \frac{x^2}{2}$ , et  $F'_y(x) = y - ax$ .

D'où les variations de  $F_y$ .



$F_y$  admet un maximum égal à  $F_y(\frac{y}{a}) = \frac{y^2}{a} - a \frac{y^2}{2 \cdot a^2} = \frac{y^2}{2 \cdot a}$ .

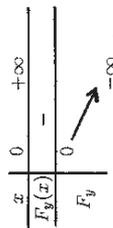
Lorsque  $f : x \mapsto a \frac{x^2}{2}$  et  $U = \mathbb{R}$ , on a :  $U(f) = \mathbb{R}$ , et  $f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2 \cdot a}$

2) b) Supposons maintenant que  $U = \mathbb{R}_+^*$  et  $f : x \mapsto \frac{x^\alpha}{\alpha}$ , où  $\alpha > 1$ .

$F_y : x \mapsto xy - \frac{x^\alpha}{\alpha}$ , et  $F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}$ .

D'où la discussion.

1er cas :  $y \leq 0$ .

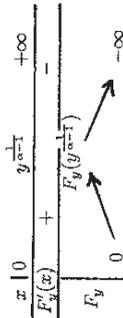


$F_y$  n'admet pas de maximum sur  $U = \mathbb{R}_+^*$ .

2ème cas :  $y > 0$ .

$F'_y(x) = 0$  si  $x^{\alpha-1} = y$ , soit :  $x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$ .

D'où le tableau de variation de  $F_y$ .



$F_y$  admet un maximum égal à :

$$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y \cdot y^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} (y^{\frac{1}{\alpha-1}})^{\alpha} = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (1 - \frac{1}{\alpha}) y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Introduisons le réel  $\beta$  défini par :  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$ , c'est-à-dire :  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ .

Le maximum précédent de  $F_y$  vaut :  $F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1}{\beta} y^{\beta}$ . Dans ce cas, il vient :  $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$ .

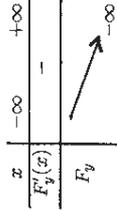
$$\text{Lorsque } U = \mathbf{R}_+^* \text{ et } f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}, \text{ on obtient : } U(f) = \mathbf{R}_+^* \text{ et } f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta} \text{ pour } y > 0$$

2) c) Supposons que  $U = \mathbf{R}$  et  $f(x) = e^x$ .

$$F_y(x) = x \cdot y - e^x, \text{ et : } F_y'(x) = y - e^x.$$

1er cas :  $y \leq 0$ .

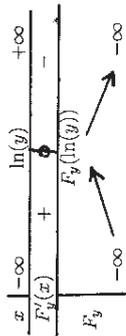
Les variations de  $F_y$  sont les suivantes.



$F_y$  n'admet pas de maximum sur  $U = \mathbf{R}$ .

2ème cas :  $y > 0$ .

$F_y'(x) = 0$  si  $e^x = y$ , soit :  $x = \ln(y)$ . On obtient les variations suivantes.



$F_y$  admet pour maximum  $F_y(\ln(y)) = y \cdot \ln(y) - e^{\ln(y)} = y \cdot \ln(y) - y = y \cdot (\ln(y) - 1)$ .

$$\text{Lorsque } U = \mathbf{R} \text{ et } f(x) = e^x, \text{ on obtient } U(f) = \mathbf{R}_+^*, \text{ et } f^*(y) = y \cdot \ln(y) - y \text{ pour } y > 0$$

3) a) Supposons que  $U = \mathbf{R}$  et  $f(x) = a \cdot \frac{x^2}{2}$ , où  $a > 0$ .

On a obtenu :  $U(f) = \mathbf{R}$ , et  $f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2a}$ , de sorte que l'étude de  $(f^*)^*$  nous ramène à celle de  $f^*$  en changeant  $a$  en  $\frac{1}{a}$ .

$$U(f^*) = \mathbf{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = a \cdot \frac{y^2}{2}, y \in \mathbf{R}$$

3) b) Supposons que  $U = \mathbf{R}_+^*$  et  $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$ .

On a obtenu :  $U(f) = \mathbf{R}_+^*$  et  $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$ , où le réel  $\beta$  est défini par la relation :  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ .

Il vient  $\beta > 1$  et l'étude de  $f^*$  peut se ramener, à encore, à celle de  $f$ , en remplaçant le paramètre  $\alpha$  par  $\beta$  et en notant que le réel associé à  $\beta$  par la relation  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  n'est autre que  $\alpha$ .

$$U(f^*) = \mathbf{R}_+^* \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^{\alpha}}{\alpha}$$

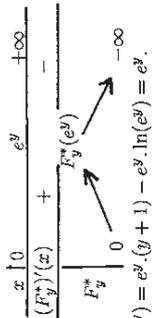
3) c) Supposons que  $U = \mathbf{R}$  et  $f(x) = e^x$ .

On a trouvé :  $U(f) = \mathbf{R}_+^*$  et  $f^*(x) = x \cdot \ln(x) - x$ , pour  $x > 0$ .

Posons  $F_y^*(x) = x \cdot y - f^*(x) = x \cdot y - x \cdot \ln(x) + x = x \cdot (y + 1) - x \cdot \ln(x)$ .

$(F_y^*)'(x) = y + 1 - 1 - \ln(x)$ ,  $(F_y^*)'(x) = 0$  si  $\ln(x) = y$ , soit si  $x = e^y$ .

D'où les variations de  $F_y^*$ .



$F_y^*$  admet un maximum égal à  $F_y^*(e^y) = e^y \cdot (y + 1) - e^y \cdot \ln(e^y) = e^y$ .

$$U(f^*) = \mathbf{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = e^y \text{ pour } y \in \mathbf{R}$$

On constate sur les trois exemples précédents que  $U(f^*) = U$  et que  $(f^*)^* = f$ .

4) a)

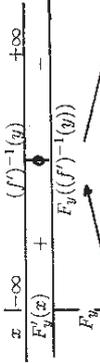
$f^*(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$  et  $f'' > 0$  sur  $\mathbf{R}$ . On conclut que  $f'$  est une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ .

4) b) (i)  $F_y(x) = x \cdot y - f(x)$  et  $F_y'(x) = y - f'(x)$ .

$F_y'(x) = 0$  si  $x = (f')^{-1}(y)$ .

$F_y'$  étant décroissante, on a  $F_y' > 0$  sur  $]-\infty, (f')^{-1}(y)[$  et  $F_y' < 0$  sur  $](f')^{-1}(y), +\infty[$ .

Le tableau de variation de  $F_y$  est le suivant :



$F_y$  admet un maximum égal à  $F_y((f')^{-1}(y)) = y \cdot (f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)) = y \cdot g(y) - f(g(y))$ .

$$U(f) = \mathbf{R} \text{ et } f^*(y) = y \cdot g(y) - f(g(y))$$

(ii)  $f'$  est une bijection dérivable de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$  dont la dérivée  $f''$  n'est nulle en aucun point de  $\mathbf{R}$ .

La bijection réciproque  $g = (f')^{-1}$  est donc dérivable sur  $\mathbf{R}$ , et :  $\forall y \in \mathbf{R}, g'(y) = \frac{1}{f''(x)}$  si  $y = f'(x)$ .

$y \mapsto f(g(y))$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme composée de fonctions dérivables.

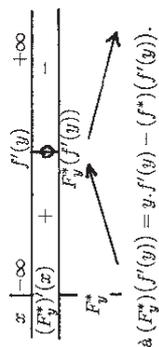
$$f^* : y \mapsto y \cdot g(y) - f(g(y)) \text{ est aussi dérivable sur } \mathbf{R}$$

(iii)  $\forall y \in \mathbf{R}, (f^*)'(y) = g(y) + y \cdot g'(y) - f'(g(y)) \cdot g'(y)$ .

Comme  $g = (f')^{-1}$ , il vient :  $f'(g(y)) = y$ , et  $(f^*)'(y) = g(y)$ .

$$\text{Finalement : } (f^*)' = g$$

4) c) Soit  $F_y^* : x \mapsto xy - (f^*)'(x) = xy - xg(x) + f(g(x))$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ .  
 $(F_y^*)'(x) = y - g(x) - xg'(x) + f'(g(x))g'(x) = y - g(x) + f'(g(x))g'(x) = x$ .  
 $(F_y^*)'(x) = 0$  si  $g(x) = y$ , soit  $x = g^{-1}(y) = f'(y)$ .  
 $g = (f')^{-1}$ , a même sens de variation que  $f'$  et est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 $(F_y^*)'$  est donc strictement décroissante sur  $]-\infty, +\infty[$ , et  $> 0$  sur  $]-\infty, f'(y)[$  puis  $< 0$  sur  $]f'(y), +\infty[$ .  
D'où les variations de  $F_y^*$ .



$F_y^*$  admet donc un maximum égal à  $(F_y^*)'(f'(y)) = yf'(y) - (f^*)'(f'(y))$ .  
Soit  $(F_y^*)'(f'(y)) = yf'(y) - f'(y)g(f'(y)) + f(g(f'(y))) = yf'(y) - f'(y)g(y) + f(y) = f(y)$ .

On conclut que :  $\forall y \in \mathbb{R}, (F_y^*)'(y) = f(y)$ , donc que  $(f^*)'' = f$

1) a) (i) Soit  $t > 0$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ .  
 $F_y(ty) = \langle ty, ty \rangle = t \cdot \|y\|^2 = t \cdot \|y\| \cdot \|y\| = t \cdot (\|y\| \cdot \|y\|)$ .

$$F_y(ty) = t \cdot \|y\| \cdot (\|y\| - 1)$$

(ii) 1er cas :  $\|y\| > 1$ .  
On a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = +\infty$ .  
2ème cas :  $\|y\| \leq 1$ .  
On obtient :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = -\infty$ .  
3ème cas :  $\|y\| = 1$ .  
On a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = 0$ .

(iii) Si  $F_y$  admet un maximum sur  $U = \mathbb{R}^n$ , on ne peut pas avoir  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty) = +\infty$ , et donc nécessairement  $\|y\| \leq 1$ .

$$U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$$

2) b) (i) Supposons  $\|y\| \leq 1$ .  
L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :  $F_y(x) = \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| = \|x\|$ .  
Soit :  $F_y(x) \leq \|x\| \cdot (\|y\| - 1) \leq 0 = F_y(0)$ .

$$\text{Si } \|y\| \leq 1, \text{ on a : } F_y(x) \leq F_y(0)$$

(ii) Lorsque  $\|y\| \leq 1$ ,  $F_y$  admet  $F_y(0) = 0$  comme maximum, et donc  $y \in U(f)$ .  
Cela se traduit par l'inclusion :  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\} \subset U(f)$ .  
Compte-tenu de l'inclusion obtenue au 1)a), il vient :

$$U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}, \text{ et } f^*(y) = F_y(0) = 0 \text{ pour } y \in U(f)$$

c) Soit  $F_y^* : x \mapsto \langle x, y \rangle - (f^*)'(x) = \langle x, y \rangle - x$ ,  $x \in U(f)$ .  
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne à nouveau :  
 $F_y(x) \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$ , puisque  $x \in U(f^*)$  et  $\|x\| \leq 1$ .  
D'autre part :  $F_y^*\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \|y\|$ .

On voit que  $F_y^*$  admet pour maximum sur  $U(f^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$  la valeur  $(F_y^*)\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|$  quel que soit  $y \in \mathbb{R}^n$ .

On conclut que :  $U(f^*) = \mathbb{R}^n$ , et que  $(f^*)'(y) = \|y\| = f(y)$  pour  $y \in \mathbb{R}^n$ , soit  $(f^*)'' = f$

2) a) Assimilons  $A$  à un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne canonique, en confondant  $A$  et l'endomorphisme que  $A$  représente dans la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .  
Cette base canonique est en effet orthogonale pour la structure euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Il existe alors une base orthonormale  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .  
Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , les valeurs propres respectivement associées à  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , en supposant que :  
 $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \mu$ .  
Soit  $x$ , un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Ecrivons :  $x = \sum_{k=1}^n x_k u_k$ . Par linéarité :  $Ax = \sum_{k=1}^n x_k A u_k$ .

$$\langle x, Ax \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{k=1}^n x_k A u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \langle u_i, A u_k \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \langle u_i, \lambda_k u_k \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \lambda_k \langle u_i, u_k \rangle$$

$$\text{Soit : } \langle x, Ax \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k x_i x_k \langle u_i, u_k \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Comme  $\langle u_i, u_k \rangle = 0$  si  $i \neq k$  et  $\langle u_i, u_i \rangle = 1$  si  $i = k$ , il vient :

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$$

Ensuite, puisque  $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \mu$ , on obtient :

$$\lambda \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \leq \langle x, Ax \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \mu \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$$

Par ailleurs, la base  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  étant orthonormale :  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|^2$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \|x\|^2 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \mu \|x\|^2$$

$$2) b) (i) F_y(x+h) - F_y(x) = \langle x+h, y \rangle - \langle x, y \rangle = \frac{\langle x+h, y \rangle + \langle x, y \rangle}{2} - \langle x, y \rangle = \frac{\langle x+h, y \rangle - \langle x, y \rangle}{2}$$

La bilinéarité du produit scalaire permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 F_y(x+h) - F_y(x) &= \frac{\langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2} - \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} \\
 &= \frac{\langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2} \\
 A \text{ étant symétrique, il vient : } \langle x, Ah \rangle &= \langle h, Ax \rangle \\
 D'où : F_y(x+h) - F_y(x) &= \frac{\langle h, y \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle}{2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_y(x+h) - F_y(x) = \langle h, y - Ax \rangle + \frac{\langle h, Ah \rangle}{2}}$$

(ii) D'après l'encadrement obtenu au 2)is), on a :  $\lambda \cdot \|h\|^2 \leq \langle h, Ah \rangle$ .  
 Les valeurs propres de A étant strictement positives, on a :  $\lambda > 0$ , et donc :  $\langle h, Ah \rangle \geq 0$ .  
 D'où :  $F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle$ .

$$\boxed{\forall (x, y, h) \in (\mathbb{R}^n)^3, F_y(x+h) - F_y(x) \leq \langle h, y - Ax \rangle}$$

2) c) (i) Remarquons d'abord que A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.  
 Prenons  $x = A^{-1}y$  dans l'inégalité précédente.  
 $Ax = y$ , et  $F_y(A^{-1}y+h) - F_y(A^{-1}y) \leq \langle h, y - y \rangle = 0$ .  
 Soit :  $F_y(A^{-1}y+h) \leq F_y(A^{-1}y)$ .

Soit alors z, un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .  
 En appliquant l'inégalité précédente avec  $h = z - A^{-1}y$ , on obtient :  
 $F_y(z) \leq F_y(A^{-1}y)$ .

D'autre part :

$$F_y(A^{-1}y) = \frac{\langle A^{-1}y, A \cdot A^{-1}y \rangle}{2} = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2} < \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}$$

$$\boxed{F_y \text{ présente donc un maximum au point } A^{-1}y, \text{ et ce maximum vaut : } F_y(A^{-1}y) = \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}}$$

(ii)

$$\boxed{\text{On a : } U(f) = \mathbb{R}^n, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{\langle y, A^{-1}y \rangle}{2}}$$

(iii) On peut ramener l'étude de  $f^*$  à celle de f en remplaçant la matrice A par  $A^{-1}$ .  
 En effet  $A^{-1}$ , inverse de A, est également symétrique, et ses valeurs propres  $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  sont strictement positives.  
 Comme  $(A^{-1})^{-1} = A$ , on conclut que :

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que : } (f^*)^* : y \mapsto \frac{\langle y, A \cdot y \rangle}{2} = f(y). \text{ Soit : } (f^*)^* = f}$$

• (i) L'inégalité du 2)a) donne :  $F_y(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} \leq \frac{\lambda \cdot \|x\|^2}{2}$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet ensuite d'écrire :  $F_y(x) \leq \|y\| \cdot \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$ .

Soit :  $F_y(x) \leq \|y\| \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right) \|x\|^2$ .

Lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$ ,  $\|y\| - \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$  tend vers  $-\infty$ , car y est fixé et  $\lambda > 0$ .

$$\boxed{D'où : \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_y(x) = -\infty}$$

(ii) Soit  $x_0$ , un élément fixé de U. La définition de la limite donne alors :

$$\boxed{\text{Il existe } r > 0 \text{ tel que } \|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0)}$$

• (i) L'application  $\varphi : x \mapsto \|x\|$  est continue ( $\varphi$  est même 1-lipchitzienne d'après l'inégalité :  $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \|u - v\|$ ).

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\} = \varphi^{-1}([-\infty, r])$  est donc un fermé comme image réciproque du fermé  $]-\infty, r]$  par  $\varphi$ .

$U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  est alors un fermé comme intersection de deux fermés.

(ii) Par ailleurs,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$ . C'est une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .  
 Comme  $U_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ ,  $U_0$  est également une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\boxed{U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n}$$

(iii)  $F_y$  est continue sur  $U_0$ , car chacune des applications :  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  et  $\frac{\langle x, Ax \rangle}{2}$  est continue sur  $U_0$ .

Il suffit, pour démontrer ces propriétés de continuité, de considérer les expressions :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \text{ et } \frac{\langle x, Ax \rangle}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$$

obtenues en rapportant  $\mathbb{R}^n$  à la base orthonormale  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de vecteurs propres de A considérée au 2)a).

Les deux fonctions précédentes sont polynômes en  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Or, une application continue sur une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}^n$  admet un maximum sur cette partie.  
 $F_y$  admet donc un maximum M =  $F_y(x_1)$  sur  $U_0$ , atteint en un point  $x_1$  de  $U_0$ .

Par ailleurs, l'implication :  $\|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0)$  impose  $\|x_0\| \leq r$ , de sorte que  $x_0 \in U_0$ .

On obtient :  $x \in U, \|x\| > r \implies F_y(x) < F_y(x_0) \leq F_y(x_1) = M$ .

$M = F_y(x_1)$  est donc aussi le maximum de  $F_y$  sur U.

$$\boxed{F_y \text{ admet un maximum sur } U \text{ quelque soit } y \in \mathbb{R}, \text{ et } U(f) = \mathbb{R}^n}$$

3) b)

$$\begin{aligned}
 &F_y\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{F_y(x) + F_y(x')}{2} \\
 &= \frac{x+x'}{2}, y \rangle - \frac{\langle \frac{x+x'}{2}, A \cdot \frac{x+x'}{2} \rangle}{2} > \frac{1}{2} \cdot \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, Ax \rangle}{4} - \frac{1}{2} \cdot \langle x', y \rangle + \frac{\langle x', Ax' \rangle}{4}
 \end{aligned}$$