Mathématiques
Voies S et E

Corrigés des épreuves ESSEC 2005 Maths I S et Maths II E

Alain Combrouze
Professeur de mathématiques en classes préparatoires scientifiques, lycée Saint-Louis (Paris) et économiques et commerciales, Prépasup (Paris).

Voie scientifique

BCE
BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note x_i sa $i^{ème}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x,y\rangle = {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.
On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x,y\rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.
Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

PARTIE I

Dans cette partie, $n=1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x)=xy-f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Quelques exemples.
   Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :
   a) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=a\dfrac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.
   b) $U=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.
   (on pourra introduire le réel β vérifiant : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$).
   c) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.
3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?
4) Plus généralement, on suppose que : $U=\mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x)>0$.
   a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note g l'application réciproque de f'.
   b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f)=\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^*(x)=xg(x)-f(g(x))$.
   Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g.
   c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x\mapsto xy-f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^*=f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\|x\|$.
   a) Pour t réel strictement positif et $y\in\mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t\to+\infty}F_y(ty)$.
   Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y\in\mathbb{R}^n, \|y\|\le 1\}$?
   b) Lorsque $\|y\|\le 1$, montrer que : $F_y(x)\le F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^*.
   c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
On rappelle que : $\forall x,x'\in\mathbb{R}^n\quad \langle x,Ax'\rangle=\langle x',Ax\rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.
   Pour $y\in\mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.
   a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :
   $\lambda\|x\|^2\le\langle x,Ax\rangle\le\mu\|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.
   b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h)-F_y(x)$ en fonction de $\langle h,Ah\rangle$ et $\langle h,y-Ax\rangle$ et établir que : $F_y(x+h)-F_y(x)\le\langle h,y-Ax\rangle$.
   c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour : $x=A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.
3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$ mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.
   On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :
   pour tout $x\in\mathbb{R}^n\quad F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.
   a) Existence d'un maximum.
   - Montrer que : $\forall y\in\mathbb{R}^n\quad\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}F_y(x)=-\infty$ et en déduire que pour $x_0\in U$:
     il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\|>r\Rightarrow F_y(x)<F_y(x_0))$.
   - Établir que l'ensemble $U_0=U\cap\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\le r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f)=\mathbb{R}^n$.
   b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.
   - Pour x et x' deux vecteurs de U et $y\in\mathbb{R}^n$, établir la relation :
     $F_y(\dfrac{x+x'}{2})-\dfrac{F_y(x)}{2}-\dfrac{F_y(x')}{2}=\dfrac{\langle x-x',A(x-x')\rangle}{8}$.
   - En supposant que $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y,
     montrer que : $f^*(y)<F_y(\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{x}'))$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.
On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx=c$.
On note $\operatorname{Im} M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.
On suppose que $c\in\operatorname{Im}B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).
D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\bar{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y.
L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\bar{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1) Caractérisation de $\overline{x}$.

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$ $\langle x, Bx'\rangle = \langle {}^tBx, x'\rangle$.

Montrer que : $\operatorname{Im}{}^tB \subset (\ker B)^{\perp}$ en désignant par $(\ker B)^{\perp}$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\operatorname{Im}{}^tB$ et de $(\ker B)^{\perp}$ et en déduire que :

$\operatorname{Im}{}^tB = (\ker B)^{\perp}$. (On admettra que : $rg(B) = rg({}^tB)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\overline{x}+th) - F_y(\overline{x}) = t\langle y - A\overline{x}, h\rangle - t^2\frac{\langle h, Ah\rangle}{2}.$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$\forall p \in \mathbb{N}\quad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations : $A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$\| z_{p+1} - \overline{z}\|^2 = \| z_p - \overline{z}\|^2 - 2r\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle + r^2 \| B(x_p - \overline{x})\|^2$.

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\| BA^{-1/2}x\|^2 = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x\rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\| Bx\|^2 \le \alpha\langle x, Ax\rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \dfrac{2}{\alpha}\right[$.

Montrer que : $\| z_{p+1} - \overline{z}\|^2 - \| z_p - \overline{z}\|^2 \le r(r\alpha - 2)\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle \le 0$.

En déduire que la suite $(\| z_p - \overline{z}\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.

***

Partie I

1) $F_y : x \mapsto x.y - f(x)$ est continue sur le segment U, donc bornée sur U, et admet un maximum (et un minimum) sur U quelque soit y réel.

$\boxed{f^* \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}}$

2) a) Soient $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = a.\dfrac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

$F_y(x) = x.y - a.\dfrac{x^2}{2}$, et $F'_y(x) = y - a.x$.

D'où les variations de F_y.

x	$-\infty$		$\frac{y}{a}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	$\nearrow$	$F_y(\frac{y}{a})$	$\searrow$	$-\infty$

F_y admet un maximum égal à $F_y(\frac{y}{a}) = \dfrac{y^2}{a} - a.\dfrac{y^2}{2.a^2} = \dfrac{y^2}{2.a}$.

$\boxed{\text{Lorsque } f : x \mapsto a.\frac{x^2}{2} \text{ et } U = \mathbb{R}, \text{ on a : } U(f) = \mathbb{R}, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2.a}}$

2) b) Supposons maintenant que $U = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$, où $\alpha > 1$.

$F_y : x \mapsto x.y - \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$, et $F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}$.

D'où la discussion.

<u>1er cas : $y \le 0$.</u>

x	0		$+\infty$
$F_y(x)$		$-$	
F_y	0	$\searrow$	$-\infty$

F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$.

<u>2ème cas : $y > 0$.</u>

$F'_y(x) = 0$ si $x^{\alpha-1} = y$, soit : $x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

D'où le tableau de variation de F_y.

x	0		$y^{\frac{1}{\alpha-1}}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$		$-$	
F_y	0	$\nearrow$	$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}})$	$\searrow$	$-\infty$

F_y admet un maximum égal à :

$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = y.y^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.(y^{\frac{1}{\alpha-1}})^{\alpha} = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (1-\frac{1}{\alpha}).y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Introduisons le réel β défini par : $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, c'est-à-dire : $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Le maximum précédent de F_y vaut : $F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}}) = \frac{1}{\beta}.y^{\beta}$ Dans ce cas, il vient : $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$.

$$\boxed{\text{Lorsque } U = \mathbb{R}_+^* \text{ et } f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}, \text{ on obtient : } U(f) = \mathbb{R}_+^* \text{ et } f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta} \text{ pour } y > 0}$$

2) c) Supposons que $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$.

$F_y(x) = x.y - e^x$, et : $F'_y(x) = y - e^x$.

<u>1er cas : $y \leq 0$.</u>

Les variations de F_y sont les suivantes.

x	$-\infty$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$-$	
F_y		$\searrow$	$-\infty$

F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbb{R}$.

<u>2ème cas : $y > 0$.</u>

$F'_y(x) = 0$ si $e^x = y$, soit : $x = \ln(y)$ On obtient les variations suivantes.

x	$-\infty$		$\ln(y)$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	$\nearrow$	$F_y(\ln(y))$	$\searrow$	$-\infty$

F_y admet pour maximum $F_y(\ln(y)) = y.\ln(y) - e^{\ln(y)} = y.\ln(y) - y = y.(\ln(y) - 1)$.

$$\boxed{\text{Lorsque } U = \mathbb{R} \text{ et } f(x) = e^x, \text{ on obtient } U(f) = \mathbb{R}_+^*, \text{ et } f^*(y) = y.\ln(y) - y \text{ pour } y > 0}$$

3) a) Supposons que $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = a.\frac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbb{R}$, et $f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2.a}$, de sorte que l'étude de $(f^*)^*$ nous ramène à celle de f^* en changeant a en $\frac{1}{a}$.

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^2}{2.\frac{1}{a}} = a.\frac{y^2}{2},\ y \in \mathbb{R}}$$

3) b) Supposons que $U = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}$.

On a obtenu : $U(f) = \mathbb{R}_+^*$ et $f^*(y) = \frac{y^{\beta}}{\beta}$, où le réel β est défini par la relation : $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Il vient $\beta > 1$ et l'étude de f^* peut se ramener, là encore, à celle de f, en remplaçant le paramètre α par β et en notant que le réel associé à β par la relation $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ n'est autre que α.

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}_+^* \text{ et } (f^*)^*(y) = \frac{y^{\alpha}}{\alpha}}$$

3) c) Supposons que $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$.

On a trouvé : $U(f) = \mathbb{R}_+^*$ et $f^*(x) = x.\ln(x) - x$, pour $x > 0$.

Posons $F_y^*(x) = x.y - f^*(x) = x.y - x.\ln(x) + x = x.(y+1) - x.\ln(x)$.

$(F_y^*)'(x) = y + 1 - 1 - \ln(x)$. $(F_y^*)'(x) = 0$ si $\ln(x) = y$, soit si $x = e^y$.

D'où les variations de F_y^*.

x	0		e^y		$+\infty$
$(F_y^*)'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y^*	0	$\nearrow$	$F_y^*(e^y)$	$\searrow$	$-\infty$

F_y^* admet un maximum égal à $F_y^*(e^y) = e^y.(y+1) - e^y.\ln(e^y) = e^y$.

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y) = e^y \text{ pour } y \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{On constate sur les trois exemples précédents que } U(f^*) = U \text{ et que } (f^*)^* = f}$$

4) a)

$$\boxed{f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } \mathbb{R}. \text{ On conclut que } f' \text{ est une bijection continue et strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}}$$

4) b) (i) $F_y(x) = x.y - f(x)$ et $F'_y(x) = y - f'(x)$.

$F'_y(x) = 0$ si $x = (f')^{-1}(y)$.

F'_y étant décroissante, on a $F'_y > 0$ sur $]-\infty, (f')^{-1}(y)[$ et $F'_y < 0$ sur $](f')^{-1}(y), +\infty[$.

Le tableau de variation de F_y est le suivant :

x	$-\infty$		$(f')^{-1}(y)$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y		$\nearrow$	$F_y((f')^{-1}(y))$	$\searrow$	

F_y admet un maximum égal à $F_y((f')^{-1}(y)) = y.(f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)) = y.g(y) - f(g(y))$.

$$\boxed{U(f) = \mathbb{R} \text{ et } f^*(y) = y.g(y) - f(g(y))}$$

(ii) f' est une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f'' n'est nulle en aucun point de $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque $g = (f')^{-1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{1}{f''(x)}$ si $y = f'(x)$.

$y \mapsto f(g(y))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\boxed{f^* : y \mapsto y.g(y) - f(g(y)) \text{ est aussi dérivable sur } \mathbb{R}}$$

(iii) $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $(f^*)'(y) = g(y) + y.g'(y) - f'(g(y)).g'(y)$.

Comme $g = (f')^{-1}$, il vient : $f'(g(y)) = y$, et $(f^*)'(y) = g(y)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } (f^*)' = g}$$

4) c) Soit F_y^* : $x \mapsto x.y - (f^*)(x) = x.y - x.g(x) + f(g(x))$, avec $x \in \mathbb{R}$.
$(F_y^*)'(x) = y - g(x) - x.g'(x) + f'(g(x)).g'(x) = y - g(x)$, puisque $f'(g(x)) = x$.
$(F_y^*)'(x) = 0$ si $g(x) = y$, soit $x = g^{-1}(y) = f'(y)$.
$g = (f')^{-1}$ a même sens de variation que f' et est strictement croissante sue $\mathbb{R}$.
$(F_y^*)'$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$, et > 0 sur $]-\infty, f'(y)[$ puis < 0 sur $]f'(y), +\infty[$.
D'où les variations de F_y^*.

x	$-\infty$		$f'(y)$		$+\infty$
$(F_y^*)'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y^*		$\nearrow$	$F_y^*(f'(y))$	$\searrow$	

F_y^* admet donc un maximum égal à $(F_y^*)(f'(y)) = y.f'(y) - (f^*)(f'(y))$.
Soit $(F_y^*)(f'(y)) = y.f'(y) - f'(y).g(f'(y)) + f[g(f'(y))] = y.f'(y) - f'(y).y + f(y) = f(y)$.

$$\boxed{\text{On conclut que : } \forall\, y \in \mathbb{R},\ (f^*)^*(y) = f(y), \text{ donc que } (f^*)^* = f}$$

Partie II

1) a) (i) Soit $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n$.
$F_y(ty) =< y, t.y > - \| t.y \| = t. \| y \|^2 - t. \| y \| = t. \| y \| .(\| y \| - 1)$.

$$\boxed{F_y(ty) = t. \| y \| .(\| y \| - 1)}$$

(ii) **1er cas : $\| y \| > 1$.**
On a : $\lim_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$.
2ème cas : $\| y \| < 1$.
On obtient : $\lim_{t \to +\infty} F_y(t.y) = -\infty$.
3ème cas : $\| y \| = 1$.
On a : $\lim_{t \to +\infty} F_y(t.y) = 0$.

(iii) Si F_y admet un maximum sur $U = \mathbb{R}^n$, on ne peut pas avoir $\lim_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$, et donc nécessairement $\| y \| \leq 1$.

$$\boxed{U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid \| y \| \leq 1\}}$$

2) b) (i) Supposons $\| y \| \leq 1$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire : $F_y(x) =< x, y > - \| x \| \leq \| x \| . \| y \| - \| x \|$.
Soit : $F_y(x) \leq \| x \| .(\| y \| - 1) \leq 0 = F_y(0)$.

$$\boxed{\text{Si } \| y \| \leq 1, \text{ on a : } F_y(x) \leq F_y(0)}$$

(ii) Lorsque $\| y \| \leq 1$, F_y admet $F_y(0) = 0$ comme maximum, et donc $y \in U(f)$.
Cela se traduit par l'inclusion : $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \| y \| \leq 1\} \subset U(f)$.
Compte-tenu de l'inclusion obtenue au 1)a), il vient :

$$\boxed{U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \| y \| \leq 1\}, \text{ et } f^*(y) = F_y(0) = 0 \text{ pour } y \in U(f)}$$

c) Soit F_y^* : $x \mapsto < x, y > - (f^*)(x) =< x, y >$, $x \in U(f)$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne à nouveau :
$F_y(x) \leq \| x \| . \| y \| \leq \| y \|$, puisque $x \in U(f^*)$ et $\| x \| \leq 1$.
D'autre part : $F_y^*(\frac{y}{\| y \|}) =< \frac{y}{\| y \|}, y >= \frac{< y, y >}{\| y \|} = \| y \|$.
On voit que F_y^* admet pour maximum sur $U(f^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \| y \| \leq 1\}$ la valeur $(F_y^*)(\frac{y}{\| y \|}) = \| y \|$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{On conclut que : } U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que } (f^*)^*(y) = \| y \| = f(y) \text{ pour } y \in \mathbb{R}^n, \text{ soit } (f^*)^* = f}$$

2) a) Assimilons A à un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, en confondant A et l'endomorphisme que A représente dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Cette base canonique est en effet orthonormale pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
Il existe alors une base orthonormale $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, les valeurs propres respectivement associées à u_1, u_2,...,u_n, en supposant que : $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$.
Soit x, un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Ecrivons : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.u_k$. Par linéarité : $A.x = \sum_{k=1}^{n} x_k.A.u_k$.
$< x, A.x >=< \sum_{i=1}^{n} x_i.u_i, \sum_{k=1}^{n} x_k.A.u_k >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, A.u_k >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, \lambda_k.u_k >$.
Soit : $< x, A.x >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_i.x_k. < u_i, u_k >$.
Comme $< u_i, u_k >= 0$ si $i \neq k$ et $< u_i, u_k >= 1$ si $i = k$, il vient :
$< x, A.x >= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2$.
Ensuite, puisque $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$, on obtient :
$\lambda.(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) \leq < x, A.x >= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2. \leq \mu.(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)$.
Par ailleurs, la base $(u_1, u_2, ..u_n)$ étant orthonormale : $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \| x \|^2$.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda. \| x \|^2 \leq < x, A.x > \leq \mu. \| x \|^2}$$

2) b) (i) $F_y(x+h) - F_y(x) =< x+h, y > - \frac{< x+h, A.(x+h) >}{2} - < x, y > + \frac{< x, A.x >}{2}$.
La bilinéarité du produit scalaire permet d'écrire :

$F_y(x+h) - F_y(x)$

$= <x,y> + <h,y> - \dfrac{<x,A.x> + <x,A.h> + <h,A.x> + <h,A.h>}{2}$

$\quad - <x,y> + \dfrac{<x,A.x>}{2}$

$= <h,y> - \dfrac{<x,A.h> + <h,A.x> + <h,A.h>}{2}$.

A étant symétrique, il vient : $<x,A.h> = <h,A.x>$.

D'où : $F_y(x+h) - F_y(x) = <h,y> - <h,A.x> - \dfrac{<h,A.h>}{2}$.

$$\boxed{F_y(x+h) - F_y(x) = <h, y - A.x> - \frac{<h,A.h>}{2}}$$

(ii) D'après l'encadrement obtenu au 2)a), on a : $\lambda . \| h \|^2 \leq <h, A.h>$.

Les valeurs propres de A étant strictement positives, on a : $\lambda > 0$, et donc : $<h,A.h> \geq 0$.

D'où : $F_y(x+h) - F_y(x) \leq <h, y - A.x>$.

$$\boxed{\forall\,(x,y,h) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ F_y(x+h) - F_y(x) \leq <h, y - A.x>}$$

2) c) *(i)* Remarquons d'abord que A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

Prenons $x = A^{-1}.y$ dans l'inégalité précédente.

$A.x = y$, et $F_y(A^{-1}.y + h) - F_y(A^{-1}.y) \leq <h, y - y> = 0$.

Soit : $F_y(A^{-1}.y + h) \leq F_y(A^{-1}.y)$.

Soit alors z, un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

En appliquant l'inégalité précédente avec $h = z - A^{-1}.y$, on obtient :

$F_y(z) \leq F_y(A^{-1}.y)$.

D'autre part :

$F_y(A^{-1}.y) = <y, A^{-1}.y> - \dfrac{<A^{-1}.y, A.A^{-1}.y>}{2} = <y, A^{-1}.y> - \dfrac{<A^{-1}.y, y>}{2} = \dfrac{<y, A^{-1}.y>}{2}$

$$\boxed{F_y \text{ présente donc un maximum au point } A^{-1}.y, \text{ et ce maximum vaut : } F_y(A^{-1}.y) = \frac{<y, A^{-1}.y>}{2}}$$

(ii)

$$\boxed{\text{On a : } U(f) = \mathbb{R}^n, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{<y, A^{-1}.y>}{2}}$$

(iii) On peut ramener l'étude de f^* à celle de f en remplaçant la matrice A par A^{-1}.

En effet A^{-1}, inverse de A, est également symétrique, et ses valeurs propres $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, .., \dfrac{1}{\lambda_n}$ sont strictement positives.

Comme $(A^{-1})^{-1} = A$, on conclut que :

$$\boxed{U(f^*) = \mathbb{R}^n, \text{ et que : } (f^*)^* : y \mapsto \frac{<y, A.y>}{2} = f(y). \text{ Soit : } (f^*)^* = f}$$

- *(i)* L'inégalité du 2)a) donne : $F_y(x) = <x,y> - \dfrac{<x,A.x>}{2} \leq <x,y> - \dfrac{\lambda . \| x \|^2}{2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet ensuite d'écrire : $F_y(x) \leq \| x \| . \| y \| - \dfrac{\lambda}{2} . \| x \|^2$.

Soit : $F_y(x) \leq \| x \| . (\| y \| - \dfrac{\lambda}{2} . \| x \|)$.

Lorsque $\| x \|$ tend vers $+\infty$, $\| y \| - \dfrac{\lambda}{2} . \| x \|$ tend vers $-\infty$, car y est fixé et $\lambda > 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty}$$

(ii) Soit x_0, un élément fixé de U. La définition de la limite donne alors :

$$\boxed{\text{Il existe } r > 0 \text{ tel que } \| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0)}$$

- *(i)* L'application $\varphi : x \mapsto \| x \|$ est continue (φ est même 1−lipchitzienne d'après l'inégalité : $\forall\,(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $| \varphi(u) - \varphi(v) | = |\| u \| - \| v \|| \leq \| u - v \|$).

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\} = \varphi^{-1}(]-\infty, r])$ est donc un fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty, r]$ par φ.

$U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$ est alors un fermé comme intersection de deux fermés.

(ii) Par ailleurs, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$ est une boule de $\mathbb{R}^n$. C'est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Comme $U_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\}$, U_0 est également une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq r\} \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n}$$

(iii) F_y est continue sur U_0, car chacune des applications : $x \mapsto <x,y>$ et $\dfrac{<x,A.x>}{2}$ est continue sur U_0.

Il suffit, pour démontrer ces propriétés de continuité, de considérer les expressions :

$<x,y> = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k.y_k$ et $\dfrac{<x,A.x>}{2} = \dfrac{1}{2}.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2$ obtenues en rapportant $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormale $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs propres de A considérée au 2)a).

Les deux fonctions précédentes sont polynômiales en $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Or, une application continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ admet un maximum sur cette partie.

F_y admet donc un maximum $M = F_y(x_1)$ sur U_0, atteint en un point x_1 de U_0.

Par ailleurs, l'implication : $\| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0)$ impose $\| x_0 \| \leq r$, de sorte que $x_0 \in U_0$.

On obtient : $x \in U$, $\| x \| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0) \leq F_y(x_1) = M$.

$M = F_y(x_1)$ est donc aussi le maximum de F_y sur U.

$$\boxed{F_y \text{ admet un maximum sur } U \text{ quelque soit } y \in \mathbb{R}, \text{ et } U(f) = \mathbb{R}^n}$$

3) b)

- $F_y(\dfrac{x+x'}{2}) - \dfrac{F_y(x)}{2} - \dfrac{F_y(x')}{2}$

$= <\dfrac{x+x'}{2}, y> - \dfrac{<\frac{x+x'}{2}, A.(\frac{x+x'}{2})>}{2} - \dfrac{1}{2}.<x,y> + \dfrac{<x,A.x>}{4} - \dfrac{1}{2}.<x',y> + \dfrac{<x',A.x'>}{4}$.