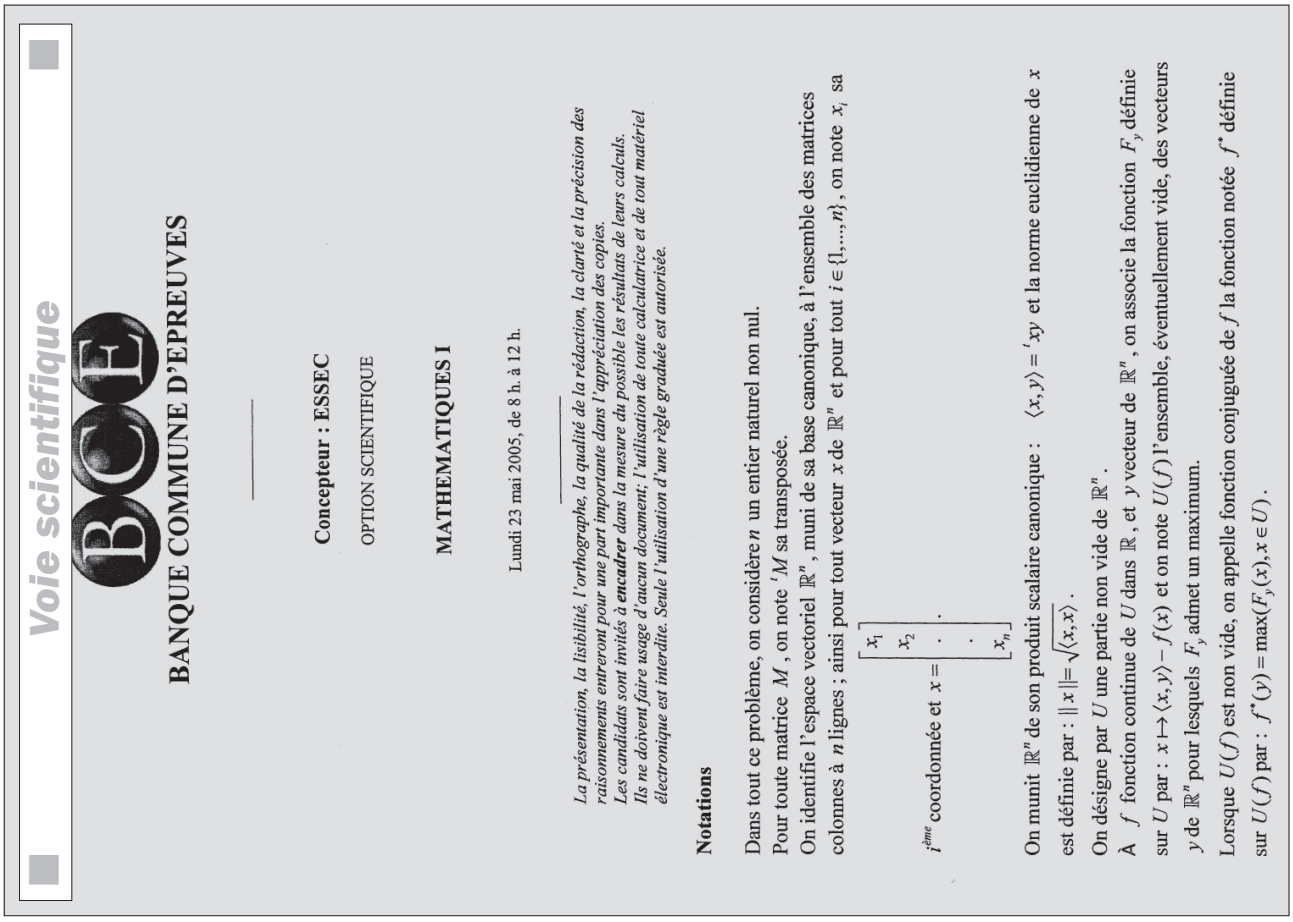
Mathématiques
Voies S et E

Corrigés des épreuves ESSEC 2005 Maths I S et Maths II E

Alain Combrouze
Professeur de mathématiques en classes préparatoires scientifiques, lycée Saint-Louis (Paris) et économiques et commerciales, Prépasup (Paris).



Voie scientifique

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Lundi 23 mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note x_i sa $i^{ème}$ coordonnée et $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $\langle x, y\rangle = {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
À f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto \langle x, y\rangle - f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.
Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée f^* définie sur $U(f)$ par : $f^*(y) = \max(F_y(x), x \in U)$.

Référence
Numéro 39 • Décembre 2005

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

PARTIE I

Dans cette partie, $n=1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x)=xy-f(x)$.

1) Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f^* est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Quelques exemples.
Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et f^* dans les cas suivants :

a) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=a\dfrac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.

b) $U=\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.

(on pourra introduire le réel β vérifiant : $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$).

c) $U=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

3) Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^*)^*$ ainsi que son ensemble de définition.
Quel constat pouvez-vous faire ?

4) Plus généralement, on suppose que : $U=\mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x)>0$.

a) Établir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
On note g l'application réciproque de f'.

b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f)=\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^*(x)=xg(x)-f(g(x))$.
Justifier la dérivabilité de f^* et exprimer $(f^*)'$ en fonction de g.

c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x\mapsto xy-f^*(x)$, en déduire que : $(f^*)^*=f$.

PARTIE II

On revient aux notations du préambule.

1) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\|x\|$.

a) Pour t réel strictement positif et $y\in\mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t\to+\infty}F_y(ty)$.
Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y\in\mathbb{R}^n,\|y\|\leq 1\}$?

b) Lorsque $\|y\|\leq 1$, montrer que : $F_y(x)\leq F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et f^*.

c) Préciser $(f^*)^*$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
On rappelle que : $\forall x,x'\in\mathbb{R}^n\quad \langle x,Ax'\rangle=\langle x',Ax\rangle$.

2) On suppose dans cette question que : $U=\mathbb{R}^n$ et $f(x)=\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.

Pour $y\in\mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.

a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :
$\lambda\|x\|^2\leq\langle x,Ax\rangle\leq\mu\|x\|^2$ lorsque λ (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.

b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h)-F_y(x)$ en fonction de $\langle h,Ah\rangle$ et $\langle h,y-Ax\rangle$ et établir que : $F_y(x+h)-F_y(x)\leq\langle h,y-Ax\rangle$.

c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour : $x=A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, f^* et $(f^*)^*$.

3) On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$ mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.
On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :

pour tout $x\in\mathbb{R}^n\qquad F_y(x)=\langle x,y\rangle-\dfrac{\langle x,Ax\rangle}{2}$.

a) Existence d'un maximum.

- Montrer que : $\forall y\in\mathbb{R}^n\qquad\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}F_y(x)=-\infty$ et en déduire que pour $x_0\in U$:
il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\|>r\Rightarrow F_y(x)<F_y(x_0))$.
- Établir que l'ensemble $U_0=U\cap\{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|\leq r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f)=\mathbb{R}^n$.

b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.

- Pour x et x' deux vecteurs de U et $y\in\mathbb{R}^n$, établir la relation :
$F_y\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)-\dfrac{F_y(x)}{2}-\dfrac{F_y(x')}{2}=\dfrac{\langle x-x',A(x-x')\rangle}{8}$.
- En supposant que $\overline{x}$ et $\overline{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y, montrer que : $f^*(y)<F_y\left(\dfrac{1}{2}(\overline{x}+\overline{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

PARTIE III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.
On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx=c$.
On note $\operatorname{Im}M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.
On suppose que $c\in\operatorname{Im}B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).
D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\overline{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y.
L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\overline{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

1) Caractérisation de $\overline{x}$.

a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, Bx' \rangle = \langle {}^tBx, x' \rangle$.

Montrer que : $\mathrm{Im}\,{}^tB \subset (\ker B)^\perp$ en désignant par $(\ker B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.

Justifier l'égalité des dimensions de $\mathrm{Im}\,{}^tB$ et de $(\ker B)^\perp$ et en déduire que : $\mathrm{Im}\,{}^tB = (\ker B)^\perp$. (On admettra que : $rg(B) = rg({}^tB)$).

b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\overline{x}+th) - F_y(\overline{x}) = t\langle y - A\overline{x}, h\rangle - t^2 \frac{\langle h, Ah\rangle}{2}.$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2) Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.

On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$\forall p \in \mathbb{N} \quad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0$ et $z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$

a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations : $A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p)$ et $z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x})$.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 = \| z_p - \overline{z} \|^2 - 2r\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle + r^2 \| B(x_p - \overline{x}) \|^2.$$

c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.

On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\| BA^{-1/2}x \|^2 = \langle x, A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x\rangle$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\| Bx \|^2 \leq \alpha\langle x, Ax\rangle$.

d) On choisit $r \in \left]0, \frac{2}{\alpha}\right[$.

Montrer que : $\| z_{p+1} - \overline{z} \|^2 - \| z_p - \overline{z} \|^2 \leq r(r\alpha - 2)\langle x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x})\rangle \leq 0$.

En déduire que la suite $(\| z_p - \overline{z} \|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.

***

Partie I

1) F_y : $x \mapsto x.y - f(x)$ est continue sur le segment U, donc bornée sur U, et admet un maximum (et un minimum) sur U quelque soit y réel.

$\boxed{f^* \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}}$

2) a) Soient $U = \mathbb{R}$ et $f(x) = a.\frac{x^2}{2}$, où $a > 0$.

$F_y(x) = x.y - a.\frac{x^2}{2}$, et $F'_y(x) = y - a.x$.

D'où les variations de F_y.

x	$-\infty$		$\frac{y}{a}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	↗	$F_y(\frac{y}{a})$	↘	$-\infty$

F_y admet un maximum égal à $F_y(\frac{y}{a}) = \frac{y^2}{a} - a.\frac{y^2}{2.a^2} = \frac{y^2}{2.a}$.

$\boxed{\text{Lorsque } f : x \mapsto a.\frac{x^2}{2} \text{ et } U = \mathbb{R}, \text{ on a : } U(f) = \mathbb{R}, \text{ et } f^* : y \mapsto \frac{y^2}{2.a}}$

2) b) Supposons maintenant que $U = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \frac{x^\alpha}{\alpha}$, où $\alpha > 1$.

$F_y : x \mapsto x.y - \frac{x^\alpha}{\alpha}$, et $F'_y(x) = y - x^{\alpha-1}$.

D'où la discussion.

1er cas : $y \leq 0$.

x	0		$+\infty$
$F_y(x)$		$-$	
F_y	0	↘	$-\infty$

F_y n'admet pas de maximum sur $U = \mathbb{R}_+^*$.

2ème cas : $y > 0$.

$F'_y(x) = 0$ si $x^{\alpha-1} = y$, soit : $x = y^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

D'où le tableau de variation de F_y.

x	0		$y^{\frac{1}{\alpha-1}}$		$+\infty$
$F'_y(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	0	↗	$F_y(y^{\frac{1}{\alpha-1}})$	↘	$-\infty$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

F_y admet un maximum égal à :

$F_y\left(y^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = y.y^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.\left(y^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{\alpha} = y^{1+\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right).y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha}.y^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$.

Introduisons le réel β défini par : $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$, c'est-à-dire : $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Le maximum précédent de F_y vaut : $F_y\left(y^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\beta}.y^{\beta}$ Dans ce cas, il vient : $f^*(y) = \frac{y^\beta}{\beta}$.

$$\boxed{\text{Lorsque } U=\mathbb{R}_+^* \text{ et } f(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha}, \text{ on obtient : } U(f)=\mathbb{R}_+^* \text{ et } f^*(y)=\frac{y^\beta}{\beta} \text{ pour } y>0}$$

2) c) Supposons que $U=\mathbb{R}$ et $f(x)=e^x$.

$F_y(x) = x.y - e^x$, et : $F_y'(x) = y - e^x$.

1er cas : $y \leq 0$.

Les variations de F_y sont les suivantes.

x	$-\infty$	$+\infty$
$F_y'(x)$	$-$	
F_y	↘	$-\infty$

F_y n'admet pas de maximum sur $U=\mathbb{R}$.

2ème cas : $y > 0$.

$F_y'(x) = 0$ si $e^x = y$, soit : $x = \ln(y)$ On obtient les variations suivantes.

x	$-\infty$		$\ln(y)$		$+\infty$
$F_y'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y	$-\infty$	↗	$F_y(\ln(y))$	↘	$-\infty$

F_y admet pour maximum $F_y(\ln(y)) = y.\ln(y) - e^{\ln(y)} = y.\ln(y) - y = y.(\ln(y)-1)$.

$$\boxed{\text{Lorsque } U=\mathbb{R} \text{ et } f(x)=e^x, \text{ on obtient } U(f)=\mathbb{R}_+^*, \text{ et } f^*(y)=y.\ln(y)-y \text{ pour } y>0}$$

3) a) Supposons que $U=\mathbb{R}$ et $f(x)=a.\frac{x^2}{2}$, où $a>0$.

On a obtenu : $U(f)=\mathbb{R}$, et f^* : $y \mapsto \frac{y^2}{2.a}$, de sorte que l'étude de $(f^*)^*$ nous ramène à celle de f^* en changeant a en $\frac{1}{a}$.

$$\boxed{U(f^*)=\mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y)=\frac{y^2}{2.\frac{1}{a}}=a.\frac{y^2}{2},\ y\in\mathbb{R}}$$

3) b) Supposons que $U=\mathbb{R}_+^*$ et $f(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha}$.

On a obtenu : $U(f)=\mathbb{R}_+^*$ et $f^*(y)=\frac{y^\beta}{\beta}$, où le réel β est défini par la relation : $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Il vient $\beta>1$ et l'étude de f^* peut se ramener, là encore, à celle de f, en remplaçant le paramètre α par β et en notant que le réel associé à β par la relation $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ n'est autre que α.

$$\boxed{U(f^*)=\mathbb{R}_+^* \text{ et } (f^*)^*(y)=\frac{y^\alpha}{\alpha}}$$

3) c) Suppososns que $U=\mathbb{R}$ et $f(x)=e^x$.

On a trouvé : $U(f)=\mathbb{R}_+^*$ et $f^*(x)=x.\ln(x)-x$, pour $x>0$.

Posons $F_y^*(x) = x.y - f^*(x) = x.y - x.\ln(x) + x = x.(y+1) - x.\ln(x)$.

$(F_y^*)'(x) = y+1-1-\ln(x)$. $(F_y^*)'(x)=0$ si $\ln(x)=y$, soit si $x=e^y$.

D'où les variations de F_y^*.

x	$\uparrow 0$		e^y		$+\infty$
$(F_y^*)'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y^*	0	↗	$F_y^*(e^y)$	↘	$-\infty$

F_y^* admet un maximum égal à $F_y^*(e^y) = e^y.(y+1) - e^y.\ln(e^y) = e^y$.

$$\boxed{U(f^*)=\mathbb{R} \text{ et } (f^*)^*(y)=e^y \text{ pour } y\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{On constate sur les trois exemples précédents que } U(f^*)=U \text{ et que } (f^*)^*=f}$$

4) a)

$$\boxed{f'(\mathbb{R})=\mathbb{R} \text{ et } f''>0 \text{ sur } \mathbb{R}. \text{ On conclut que } f' \text{ est une bijection continue et strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}}$$

4) b) (i) $F_y(x) = x.y - f(x)$ et $F_y'(x) = y - f'(x)$.

$F_y'(x)=0$ si $x=(f')^{-1}(y)$.

F_y' étant décroissante, on a $F_y'>0$ sur $]-\infty,(f')^{-1}(y)[$ et $F_y'<0$ sur $](f')^{-1}(y),+\infty[$.

Le tableau de variation de F_y est le suivant :

x	$-\infty$		$(f')^{-1}(y)$		$+\infty$
$F_y'(x)$		$+$	0	$-$	
F_y		↗	$F_y((f')^{-1}(y))$	↘	

F_y admet un maximum égal à $F_y\left((f')^{-1}(y)\right) = y.(f')^{-1}(y) - f\left((f')^{-1}(y)\right) = y.g(y) - f\left(g(y)\right)$.

$$\boxed{U(f)=\mathbb{R} \text{ et } f^*(y)=y.g(y)-f\left(g(y)\right)}$$

(ii) f' est une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée f'' n'est nulle en aucun point de $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque $g=(f')^{-1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, y\in\mathbb{R}$, $g'(y)=\frac{1}{f''(x)}$ si $y=f'(x)$.

$y \mapsto f\left(g(y)\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\boxed{f^*:\ y\mapsto y.g(y)-f\left(g(y)\right) \text{ est aussi dérivable sur } \mathbb{R}}$$

(iii) $\forall\, y\in\mathbb{R}$, $(f^*)'(y) = g(y) + y.g'(y) - f'\left(g(y)\right).g'(y)$.

Comme $g=(f')^{-1}$, il vient : $f'\left(g(y)\right)=y$, et $(f^*)'(y)=g(y)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } (f^*)'=g}$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

4) c) Soit F_y^* : $x \mapsto x.y - (f^*)(x) = x.y - x.g(x) + f\big(g(x)\big)$, *avec* $x \in \mathbb{R}$.

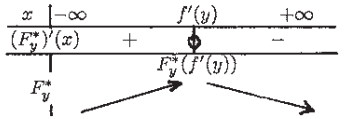
$(F_y^*)'(x) = y - g(x) - x.g'(x) + f'\big(g(x)\big).g'(x) = y - g(x)$, *puisque* $f'\big(g(x)\big) = x$.

$(F_y^*)'(x) = 0$ *si* $g(x) = y$, *soit* $x = g^{-1}(y) = f'(y)$.

$g = (f')^{-1}$ *a même sens de variation que* f' *et est strictement croissante sue* $\mathbb{R}$.

$(F_y^*)'$ *est donc strictement décroissante sur* $]-\infty, +\infty[$, *et* > 0 *sur* $]-\infty, f'(y)[$ *puis* < 0 *sur* $]f'(y), +\infty[$.

D'où les variations de F_y^*.



F_y^* *admet donc un maximum égal à* $(F_y^*)\big(f'(y)\big) = y.f'(y) - (f^*)\big(f'(y)\big)$.

Soit $(F_y^*)\big(f'(y)\big) = y.f'(y) - f'(y).g\big(f'(y)\big) + f\big[g(f'(y))\big] = y.f'(y) - f'(y).y + f(y) = f(y)$.

On conclut que : $\forall\, y \in \mathbb{R},\ (f^*)^*(y) = f(y)$, *donc que* $(f^*)^* = f$

Partie II

1) a) (i) Soit $t > 0$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$.

$F_y(ty) = < y, t.y > - \parallel t.y \parallel^2 - t. \parallel y \parallel = t. \parallel y \parallel .(\parallel y \parallel - 1)$.

$$F_y(ty) = t. \parallel y \parallel .(\parallel y \parallel - 1)$$

(ii) **1er cas :** $\parallel y \parallel > 1$.

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$.

2ème cas : $\parallel y \parallel < 1$.

On obtient : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = -\infty$.

3ème cas : $\parallel y \parallel = 1$.

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = 0$.

(iii) Si F_y *admet un maximum sur* $U = \mathbb{R}^n$, *on ne peut pas avoir* $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(t.y) = +\infty$, *et donc nécessairement* $\parallel y \parallel \leq 1$.

$$U(f) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid\mid \parallel y \parallel \leq 1\}$$

2) b) (i) Supposons $\parallel y \parallel \leq 1$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire : $F_y(x) = < x, y > - \parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel . \parallel y \parallel - \parallel x \parallel$.

Soit : $F_y(x) \leq \parallel x \parallel .(\parallel y \parallel - 1) \leq 0 = F_y(0)$.

Si $\parallel y \parallel \leq 1$, *on a :* $F_y(x) \leq F_y(0)$

(ii) Lorsque $\parallel y \parallel \leq 1$, F_y *admet* $F_y(0) = 0$ *comme maximum, et donc* $y \in U(f)$.

Cela se traduit par l'inclusion : $\{y \in \mathbb{R}^n \mid\mid \parallel y \parallel \leq 1\} \subset U(f)$.

Compte-tenu de l'inclusion obtenue au 1)a), il vient :

$$U(f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid\mid \parallel y \parallel \leq 1\},\ \text{et}\ \ f^*(y) = F_y(0) = 0\ \text{pour}\ y \in U(f)$$

c) Soit F_y^* : $x \mapsto < x, y > - (f^*)(x) = < x, y >,\ x \in U(f)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne à nouveau :

$F_y(x) \leq \parallel x \parallel . \parallel y \parallel \leq \parallel y \parallel$, *puisque* $x \in U(f^*)$ *et* $\parallel x \parallel \leq 1$.

D'autre part : $F_y^*\big(\frac{y}{\parallel y \parallel}\big) = < \frac{y}{\parallel y \parallel}, y > = \frac{< y, y >}{\parallel y \parallel} = \parallel y \parallel$.

On voit que F_y^* *admet pour maximum sur* $U(f^*) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid\mid \parallel y \parallel \leq 1\}$ *la valeur* $(F_y^*)\big(\frac{y}{\parallel y \parallel}\big) = \parallel y \parallel$ *quel que soit* $y \in \mathbb{R}^n$.

On conclut que : $U(f^*) = \mathbb{R}^n$, *et que* $(f^*)^*(y) = \parallel y \parallel = f(y)$ *pour* $y \in \mathbb{R}^n$, *soit* $(f^*)^* = f$

2) a) Assimilons A *à un endomorphisme symétrique de* $\mathbb{R}^n$ *muni de sa structure euclidienne canonique, en confondant* A *et l'endomorphisme que* A *représente dans la base canonique* $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

Cette base canonique est en effet orthonormale pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il existe alors une base orthonormale $(u_1, u_2, ..., u_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *formée de vecteurs propres de* A.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, *les valeurs propres respectivement associées à* $u_1, u_2, ..., u_n$, *en supposant que :* $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$.

Soit x, *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$.

Ecrivons : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k.u_k$. *Par linéarité :* $A.x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k.A.u_k$.

$$< x, A.x > = < \sum_{i=1}^{n} x_i.u_i, \sum_{k=1}^{n} x_k.A.u_k > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, A.u_k > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.x_k. < u_i, \lambda_k.u_k >.$$

Soit : $< x, A.x > = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.x_i.x_k. < u_i, u_k >$.

Comme $< u_i, u_k > = 0$ *si* $i \neq k$ *et* $< u_i, u_k > = 1$ *si* $i = k$, *il vient :*

$$< x, A.x > = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2.$$

Ensuite, puisque $\lambda = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \mu$, *on obtient :*

$$\lambda.\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big) \leq < x, A.x > = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k^2. \leq \mu.\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

Par ailleurs, la base $(u_1, u_2, ..u_n)$ *étant orthonormale :* $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \parallel x \parallel^2$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda. \parallel x \parallel^2 \leq < x, A.x > \leq \mu. \parallel x \parallel^2$$

2) b) (i) $F_y(x+h) - F_y(x) = < x+h, y > - \frac{< x+h, A.(x+h) >}{2} - < x, y > + \frac{< x, A.x >}{2}$.

La bilinéarité du produit scalaire permet d'écrire :

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

$F_y(x+h)-F_y(x)$

$=< x,y>+< h,y>-\dfrac{< x,A.x>+< x,A.h>+< h,A.x>+< h,A.h>}{2}$

$\quad -< x,y>+\dfrac{< x,A.x>}{2}$

$=< h,y>-\dfrac{< x,A.h>+< h,A.x>+< h,A.h>}{2}$.

A étant symétrique, il vient : $< x,A.h>=< h,A.x>$.

D'où : $F_y(x+h)-F_y(x)=< h,y>-< h,A.x>-\dfrac{< h,A.h>}{2}$.

$$\boxed{F_y(x+h)-F_y(x)=< h,y-A.x>-\frac{< h,A.h>}{2}}$$

(ii) D'après l'encadrement obtenu au 2)a), on a : $\lambda.\parallel h\parallel^2 \leq < h,A.h>$.

Les valeurs propres de A étant strictement positives, on a : $\lambda>0$, *et donc :* $< h,A.h>\geq 0$.

D'où : $F_y(x+h)-F_y(x)\leq < h,y-A.x>$.

$$\boxed{\forall\,(x,y,h)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^3,\ F_y(x+h)-F_y(x)\leq < h,y-A.x>}$$

2) c) (i) Remarquons d'abord que A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

Prenons $x=A^{-1}.y$ dans l'inégalité précédente.

$A.x=y$, *et* $F_y(A^{-1}.y+h)-F_y(A^{-1}.y)\leq < h,y-y>=0$.

Soit : $F_y(A^{-1}.y+h)\leq F_y(A^{-1}.y)$.

Soit alors z, un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

En appliquant l'inégalité précédente avec $h=z-A^{-1}.y$, on obtient :

$F_y(z)\leq F_y(A^{-1}.y)$.

D'autre part :

$$F_y\left(A^{-1}.y\right)=< y,A^{-1}.y>-\frac{< A^{-1}.y,A.A^{-1}.y>}{2}=< y,A^{-1}.y>-\frac{< A^{-1}.y,y>}{2}=\frac{< y,A^{-1}.y>}{2}$$

$$\boxed{F_y \text{ présente donc un maximum au point } A^{-1}.y, \text{ et ce maximum vaut : } F_y\left(A^{-1}.y\right)=\frac{< y,A^{-1}.y>}{2}}$$

(ii)

$$\boxed{\text{On a : } U(f)=\mathbb{R}^n, \text{ et } f^*:\ y\mapsto\frac{< y,A^{-1}.y>}{2}}$$

(iii) On peut ramener l'étude de f^* à celle de f en remplaçant la matrice A par A^{-1}.

En effet A^{-1}, inverse de A, est également symétrique, et ses valeurs propres $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},..,\frac{1}{\lambda_n}$ sont strictement positives.

Comme $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$, on conclut que :

$$\boxed{U(f^*)=\mathbb{R}^n, \text{ et que : } (f^*)^*:\ y\mapsto\frac{< y,A.y>}{2}=f(y). \text{ Soit : } (f^*)^*=f}$$

- *(i) L'inégalité du 2)a) donne :* $F_y(x)=< x,y>-\dfrac{< x,A.x>}{2}\leq < x,y>-\dfrac{\lambda.\parallel x\parallel^2}{2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet ensuite d'écrire : $F_y(x)\leq\parallel x\parallel.\parallel y\parallel-\dfrac{\lambda}{2}.\parallel x\parallel^2$.

Soit : $F_y(x)\leq\parallel x\parallel.\left(\parallel y\parallel-\dfrac{\lambda}{2}.\parallel x\parallel\right)$.

Lorsque $\parallel x\parallel$ tend vers $+\infty$, $\parallel y\parallel-\dfrac{\lambda}{2}.\parallel x\parallel$ tend vers $-\infty$, car y est fixé et $\lambda>0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{\parallel x\parallel\to+\infty}F_y(x)=-\infty}$$

(ii) Soit x_0, un élément fixé de U. La définition de la limite donne alors :

$$\boxed{\text{Il existe } r>0 \text{ tel que } \parallel x\parallel>r\Longrightarrow F_y(x)<F_y(x_0)}$$

- *(i) L'application φ : $x\mapsto\parallel x\parallel$ est continue (φ est même 1−lipchitzienne d'après l'inégalité :* $\forall\,(u,v)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^2,\ \mid\varphi(u)-\varphi(v)\mid=\parallel u\parallel-\parallel v\parallel\mid\leq\parallel u-v\parallel$).

$\{x\in\mathbb{R}^n\mid\parallel x\parallel\leq r\}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\varphi(x)\leq r\}=\varphi^{-1}(]-\infty,r])$ *est donc un fermé comme image réciproque du fermé* $]-\infty,r]$ *par* φ.

$U_0=U\cap\{x\in\mathbb{R}^n\mid\parallel x\parallel\leq r\}$ *est alors un fermé comme intersection de deux fermés.*

(ii) Par ailleurs, $\{x\in\mathbb{R}^n\mid\parallel x\parallel\leq r\}$ *est une boule de $\mathbb{R}^n$. C'est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.*

Comme $U_0\subset\{x\in\mathbb{R}^n\mid\parallel x\parallel\leq r\}$, U_0 *est également une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.*

$$\boxed{U_0=U\cap\{x\in\mathbb{R}^n\mid\parallel x\parallel\leq r\} \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n}$$

(iii) F_y est continue sur U_0, car chacune des applications : $x\mapsto< x,y>$ *et* $\dfrac{< x,A.x>}{2}$ *est continue sur U_0.*

Il suffit, pour démontrer ces propriétés de continuité, de considérer les expressions :

$< x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_k.y_k$ *et* $\dfrac{< x,A.x>}{2}=\dfrac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k^2$ *obtenues en rapportant $\mathbb{R}^n$ à la base orthonormale* $(u_1,u_2,...,u_n)$ *de vecteurs propres de A considérée au 2)a).*

Les deux fonctions précédentes sont polynômiales en $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Or, une application continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ admet un maximum sur cette partie.

F_y admet donc un maximum $M=F_y(x_1)$ sur U_0, atteint en un point x_1 de U_0.

Par ailleurs, l'implication : $\parallel x\parallel>r\Longrightarrow F_y(x)<F_y(x_0)$ *impose* $\parallel x_0\parallel\leq r$, *de sorte que* $x_0\in U_0$.

On obtient : $x\in U$, $\parallel x\parallel>r\Longrightarrow F_y(x)<F_y(x_0)\leq F_y(x_1)=M$.

$M=F_y(x_1)$ *est donc aussi le maximum de F_y sur U.*

$$\boxed{F_y \text{ admet un maximum sur } U \text{ quelque soit } y\in\mathbb{R}, \text{ et } U(f)=\mathbb{R}^n}$$

3) b)

- $F_y\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)-\dfrac{F_y(x)}{2}-\dfrac{F_y(x')}{2}$

$=< \dfrac{x+x'}{2},y>-\dfrac{< \frac{x+x'}{2},A.(\frac{(x+x'}{2})>}{2}-\dfrac{1}{2}.< x,y>+\dfrac{< x,A.x>}{4}-\dfrac{1}{2}.< x',y>+\dfrac{< x',A.x'>}{4}$.