Correction épreuve SI A 2006

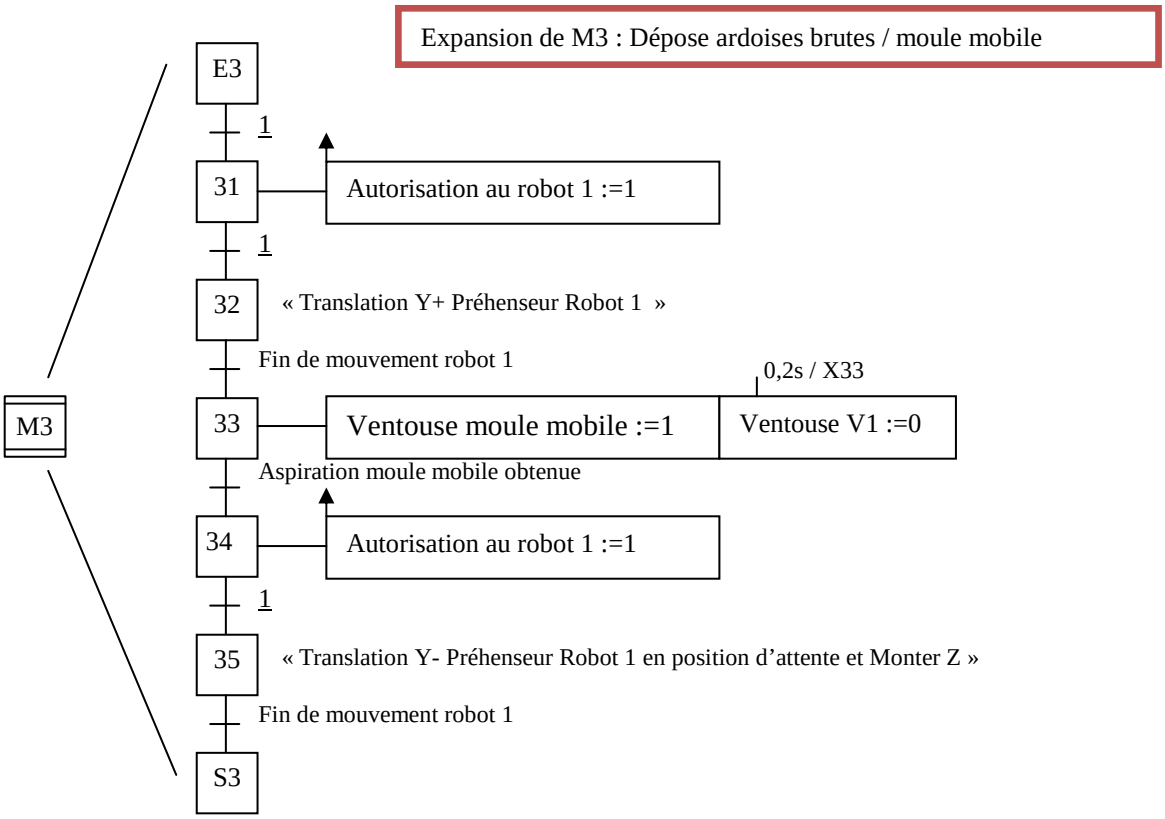
Partie 1 : analyse fonctionnelle et cinématique

Question 1.1 :

En s'inspirant de l'exemple de la macro étape M2 donnée sur le document réponse, et en respectant les entrées sorties de la sous Partie Commande, il faut, dans l'ordre :

- Placer le préhenseur devant le moule mobile (Translation Y-). On suppose ici que la position d'attente donnée dans l'exemple de la macro-étape 2 se situe entre les deux moules, puisque à la fin de M2, on ne remonte pas le préhenseur (pour gagner du temps).
- Activer les ventouses du moule mobile puis, désactiver les ventouses V1, ceci dans le but de faire tenir les ardoises brutes dans le moule mobile.
- Ressortir le préhenseur de l'espace entre les deux parties du moule (Translation Y+ et Monter Z)

Ce qui s'écrit sous forme de Grafcet, de la façon suivante :



 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

Question 1.2 :

En s'inspirant de la partie déjà rédigée de la macro étape M7 donnée sur le document réponse, on conclut que :

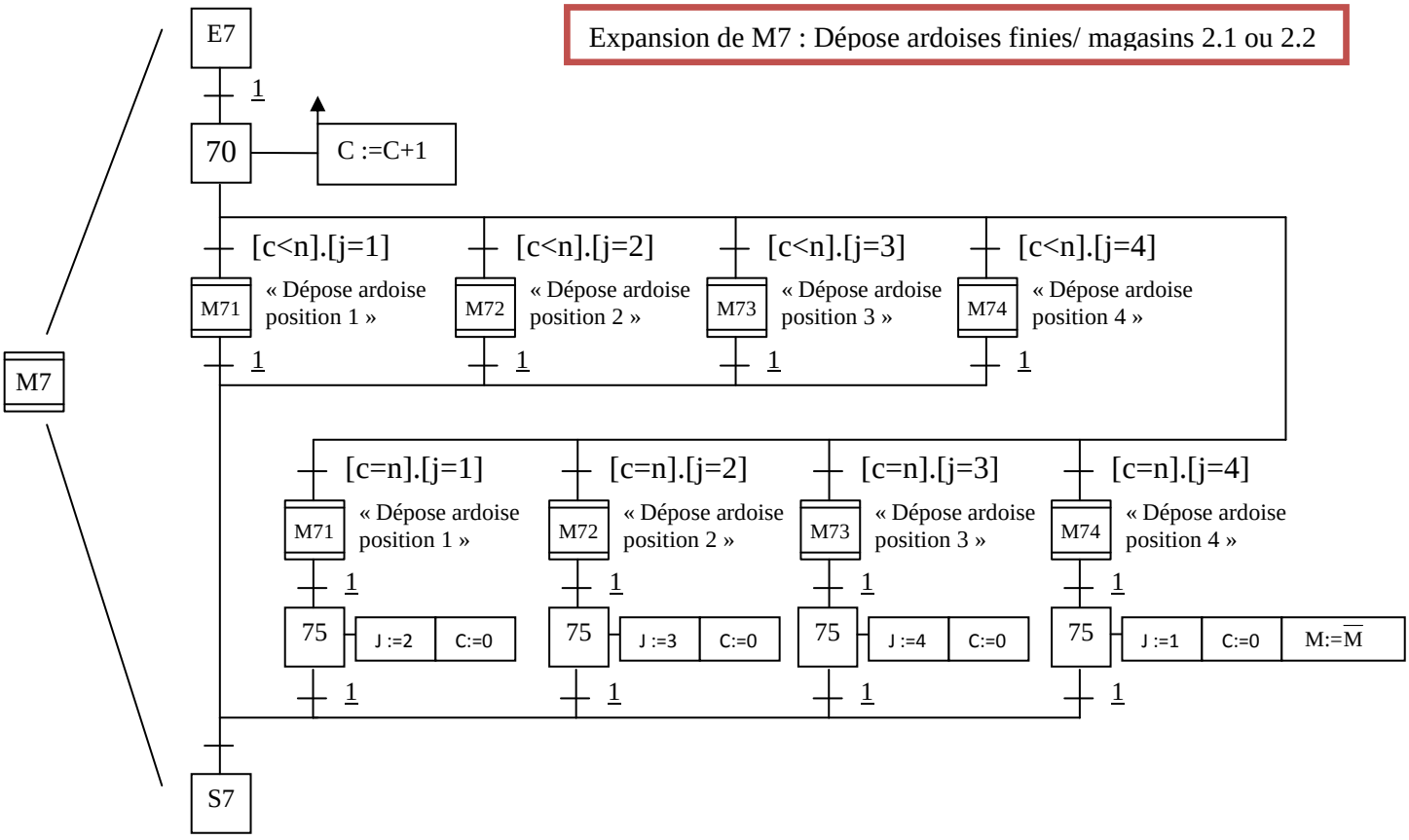
- la gestion des mouvements du robot 2 n'est pas à expliciter mais se résume à des macro-étapes intitulées « Dépose ardoise position i ».
- Le robot 2 remplit complètement chacune des positions i avant de passer à la suivante i+1, puisque la variable j qui correspond à la position où déposer les ardoises n'est pas réaffecter après M71. Elle le sera lorsque la position 1 sera remplie par n ardoises : réceptivité [c=n].[j=1].

On se retrouve donc avec 8 possibilités :

- ➲ Dépose en cours dans une des 4 positions : [c<n].[j=1] ; [c<n].[j=2] ; [c<n].[j=3] ou [c<n].[j=4].
- ➲ Dernière ardoise dans une des 4 positions : [c=n].[j=1] ; [c=n].[j=2] ; [c=n].[j=3] ou [c=n].[j=4]. Dans ce cas il faut passer au remplissage de la position suivante en remettant le compteur C à 0 et en affectant j+1 à j. ce qui n'est pas possible pour la position 4 (dernière à être remplie). Dans ce cas il faut passer à l'autre magasin, en changeant la variable M par $\overline{M}$

Ce qui s'écrit sous forme de Grafcet, de la façon suivante :

Pour des questions de place en largeur, la divergence en OU à 8 branches a été scindée en 2 ce qui donne le Grafcet juste mais pas très esthétique ci-dessous



Emmanuel FARGES
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

Question 1.3 :

Donnons l'expression littérale du moment d'inertie total équivalent J_{Teq} ramené à l'arbre moteur de l'ensemble vertical mobile (axe Z) :

- Energie cinétique de l'arbre moteur : $E_{Cm} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$ (solide en rotation autour d'un axe fixe)
- Energie cinétique du réducteur : $E_{Cr} = \frac{1}{2} J_r \omega_m^2$ (déjà ramené sur l'arbre moteur)
- Energie cinétique du pignon : $E_{Cp} = \frac{1}{2} J_p \omega_p^2 = \frac{1}{2} \frac{J_p}{n^2} \omega_m^2$ (déjà ramené sur l'arbre moteur)
- Energie cinétique de l'ensemble en translation verticale :

$$E_C = \frac{1}{2}\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right) V_p^2 = \frac{1}{2}\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right)\left(R_p \omega_p\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right) R_p^{\,2}}{n^2} \omega_m^2$$

- Energie cinétique de l'ensemble de l'axe vertical Z :

$E_C = \frac{1}{2}\left[J_r + J_m + \frac{J_p}{n^2} + \frac{\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right) R_p^{\,2}}{n^2} \right] \omega_m^2$, d'où l'inertie équivalente totale de l'axe Z ramené sur l'arbre moteur :

$$J_{Teq} = J_r + J_m + \frac{J_p}{n^2} + \frac{\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right) R_p^{\,2}}{n^2}$$

avec n_i et n_p, respectivement le nombre d'inserts et de cartons dans l'axe Z, puisque l'énoncé est flou et ne le précise pas !!!

Question 1.4 :

Donnons l'expression littérale du couple électromécanique C_m à fournir par le moteur en fonction de J_{Teq} et γ_p :

On applique le théorème de l'énergie puissance ou théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble de l'axe vertical Z :

$$\frac{dE_C}{dt} = P\left(\overline{E} \rightarrow E\right) + P_{\text{int}}$$

Les puissances intérieures sont par hypothèses nulles (effet des frottements négligé et liaisons parfaites)

$P\left(\overline{E} \rightarrow E\right) = P\left(\vec{g} \rightarrow E\right) + P\left(moteur \rightarrow E\right)$: les puissances extérieures sont celles développée d'une part par l'action de la pesanteur et d'autre part par le moteur.

La puissance des actions mécaniques de pesanteur vaut : $P\left(\vec{g} \rightarrow E\right) = M_{total} \vec{g} \,.\, \overrightarrow{V}_p$, puissance dont on ne peut donner ni le signe ni réellement l'intensité puisque elle est motrice à la descente et résistante à la montée pour ce qui est du signe. Quand à l'intensité, elle dépend du chargement, c'est-à-dire du nombre d'insert et de cartons sur l'axe !!!

La puissance développée par le moteur est : $P\left(moteur \rightarrow E\right) = C_m \omega_m$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

En se plaçant à la remontée, on a $\vec{g}\,.\,\overrightarrow{V}_p = -gV_p = -gR_p\omega_p = -g\dfrac{R_p}{n}\omega_m$

D'où l'équation issue du théorème : $J_{Teq}\omega_m\dot{\omega}_m = \left(-M_{totale}g\dfrac{R_p}{n} + C_m\right)\omega_m$, soit :

$J_{Teq}\dot{\omega}_m = -M_{totale}g\dfrac{R_p}{n} + C_m$, ou encore $C_m = J_{Teq}\dot{\omega}_m + M_{totale}g\dfrac{R_p}{n}$. Comme on a

$V_p = R_p\omega_p = \dfrac{R_p}{n}\omega_m$, on en déduit $\gamma_p = \dot{V}_p = \dfrac{R_p}{n}\dot{\omega}_m$

Soit la relation demandée : $\boxed{C_m = J_{Teq}\dfrac{n}{R_p}\gamma_p + M_{totale}g\dfrac{R_p}{n}}$

Exprimons Le couple moteur pour les trois zones du trapèze lors de la montée du bras vertical :

Phase	Accélération γ	Couple moteur C_m
a	γ_p	$C_m = J_{Teq}\dfrac{n}{R_p}\gamma_p + M_{totale}g\dfrac{R_p}{n}$
b	0	$C_m = M_{totale}g\dfrac{R_p}{n}$
c	$-\gamma_p$	$C_m = -J_{Teq}\dfrac{n}{R_p}\gamma_p + M_{totale}g\dfrac{R_p}{n}$

Question 1.5 :

Calculons l'accélération maximale théorique de la pièce : $\gamma_{p\max}$ dans le cas de charge le plus défavorable.

Le cas de charge le plus défavorable correspond à un mouvement de montée Z+ (car la pesanteur est alors résistante) avec un chargement maximal (2 pièces finies car ce sont les plus lourdes). Cela correspond à l'étape 2 : remontée des ardoises finies.

On a donc d'après la question précédente : $\gamma_{p\max} = \dfrac{R_p}{nJ_{Teq}}\left[C_{m\max} - M_{total}g\dfrac{R_p}{n}\right]$ avec, d'après les notations $M_{total} = M_z + 2M_p$, on a donc : $\boxed{\gamma_{p\max} = \dfrac{R_p}{nJ_{Teq}}\left[C_{m\max} - \left(M_z + 2M_p\right)g\dfrac{R_p}{n}\right]}$

Les valeurs numériques données dans l'énoncé valent :

$R_p = 25.10^{-3}$ m

$n = 4$

$C_{m\max} = 6{,}1$ Nm

$M_z + 2M_p = 24$ Kg

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

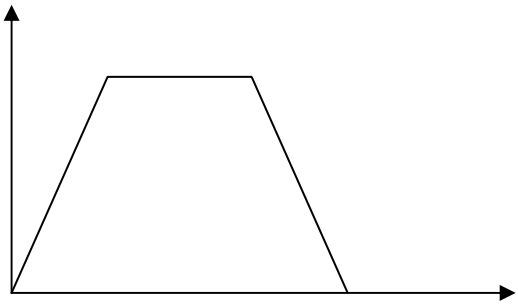
Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

$$J_{Teq} = J_r + J_m + \frac{J_p}{n^2} + \frac{\left(M_z + n_i M_i + n_p M_p\right) R_p^{\ 2}}{n^2} = 10^{-5}\left[1,7 + 54 + \frac{5}{16} + \frac{24.25^2}{160}\right] = 149,76.10^{-5} \ \text{Kg.m}^2$$

$$\gamma_{p\max} = \frac{2500}{599}\left[6,1 - 240\frac{0,025}{4}\right] = 19,18 \ \text{m.s}^{-2}$$

Calculons la vitesse maximale atteignable :

La course totale de l'axe Z correspondant à l'aire sous le trapèze (l'intégrale de la vitesse), on a la relation entre la course (qui est connue : 650 mm), l'accélération maximale et la vitesse maximale qui est imposée par le fait que les trois phases a, b et c doivent avoir des durées égales que l'on notera t



On a donc : $Course = 2\left(\frac{1}{2}\gamma_{p\max} t^2\right) + V_{p\max} t = \gamma_{p\max} t^2 + V_{p\max} t$

Or la vitesse maximale correspond à la vitesse à la fin de la phase a :

$V_{p\max} = \gamma_{p\max} t$ (1)

On a donc $Course = 2\gamma_{p\max} t^2$, soit la durée t : $t = \sqrt{\frac{Course}{2\gamma_{p\max}}}$. Donc en utilisant la relation (1) :

$$V_{p\max} = \gamma_{p\max}\sqrt{\frac{Course}{2\gamma_{p\max}}} = \sqrt{\frac{Course.\gamma_{p\max}}{2}}$$

Soit, numériquement : $V_{p\max} = \sqrt{\frac{0,65.19,18}{2}} = 2,5 \ \text{m.s}^{-1}$

Question 1.6 :

- Exprimons pour la zone a, la relation entre la position, l'accélération et la durée de cette phase.

La fonction vitesse étant linéaire, on a : $v(t) = \frac{dZ}{dt} = \gamma_p t$, d'où, en intégrant avec une position nulle à l'instant initiale :

$Z(t) = \frac{1}{2}\gamma_p t^2$, soit la relation demandée pour l'instant final de cette phase a : $Z_a = \frac{1}{2}\gamma_p t_a^2$

- A la fin de cette phase a d'accélération, l'axe Z a atteint la vitesse : $v(t_a) = V_p = \gamma_p t_a$
- D'où, en travaillant sur les deux relations ci-dessus : $Z_a = \frac{1}{2} V_p t_a$

Question 1.7 :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

On a montré précédemment (question 1.5) la relation $Course = Z_{\min} = 2\gamma_{p\max}t_a^2$ ainsi que $V_{p\max} = \gamma_{p\max}t_a$

On a donc bien : $Z_{\min} = 2\gamma_{p\max}t_a^2 = 2\gamma_{p\max}\left(\frac{V_{p\max}}{\gamma_{p\max}}\right)^2$, soit la relation voulue : $Z_{\min} = 2\frac{V_{p\max}^2}{\gamma_{p\max}}$

On obtient la valeur numérique suivante : $Z_{\min} = 400$ mm

Question 1.8 :

En étudiant l figure 1.3, comme le suggère l'énoncé mais encore plus simplement, en étudiant directement les course données dans le tableau 1.1, on remarque que les **Etapes 5 et 11** ne respecteront pas ces conditions puisque leur course est inférieure à $Z_{\min}$ et que l'étape 7 sera limite puisque sa course correspond à la valeur limite.

Question 1.9 :

La course étant supérieure à la course minimale, l'accélération réelle sera égale à l'accélération maximale : $\gamma_p = 20$ m.s^{-2}

A l'accélération, d'après la question 1.4, on a :

$$C_m = J_{Teq}\frac{n}{R_p}\gamma_p + M_{totale}g\frac{R_p}{n}$$

avec, d'après l'énoncé : $J_{Teq} = 1,3.10^{-3} + 2,2.10^{-4}.2 = 17,4.10^{-4}$ Kg.m^2 puisque l'on a deux pièces.

D'où $C_m = \frac{17,4.10^{-4}.4.20}{25.10^{-3}} + 240.\frac{25.10^{-3}}{4} = 7$ Nm

A la décélération, d'après la question 1.4, on a :

$$C_m = -J_{Teq}\frac{n}{R_p}\gamma_p + M_{totale}g\frac{R_p}{n}$$

avec, d'après l'énoncé : $J_{Teq} = 1,3.10^{-3} + 2,2.10^{-4}.2 = 17,4.10^{-4}$ Kg.m^2 puisque l'on a deux pièces.

D'où $C_m = -\frac{1,74.10^{-3}.4.20}{25.10^{-3}} + 240.\frac{25.10^{-3}}{4} = -4$ Nm

Question 1.10 :

A l'étape 5, la course étant inférieure à la course minimale nécessaire pour atteindre l'accélération maximale, il faut refaire les calculs.

Les relations démontrées restent vraies mais ne correspondent simplement plus aux vitesse et accélération maximale :

$Course = 2\gamma_p t_a^2$ et $V_p = \gamma_p t_a$

Toutefois, il existe une infinité de solutions puisque l'on a 2 équations à trois inconnues !!!

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

On doit donc exploiter les courbes de la figure 1.3 (énoncé très flou) et constater que lors de l'étape 5, on a $V_p = 1,7 \text{ m.s}^{-1}$

D'où, puisque $Course = 2V_p t_a$: $t_a = \frac{Course}{2V_p} = \frac{0,65}{3,4} = 0,191s$, soit

$$\gamma_p = \frac{V_p}{t_a} = \frac{1,7}{0,191} = 8,9 \text{ m.s}^{-2}$$

A l'accélération, d'après la question 1.4, on a :

$$C_m = J_{Teq} \frac{n}{R_p} \gamma_p + M_{totale} g \frac{R_p}{n}$$

avec, d'après l'énoncé : $J_{Teq} = 1,3.10^{-3} + 2,2.10^{-4}.1 = 15,2.10^{-4}$ Kg.m^2 puisque l'on a une seule pièce à l'étape 5.

D'où $C_m = \frac{15,2.10^{-4}.4.8,9}{25.10^{-3}} + 240.\frac{25.10^{-3}}{4} = 3,7 \text{ Nm}$

A la décélération, d'après la question 1.4, on a :

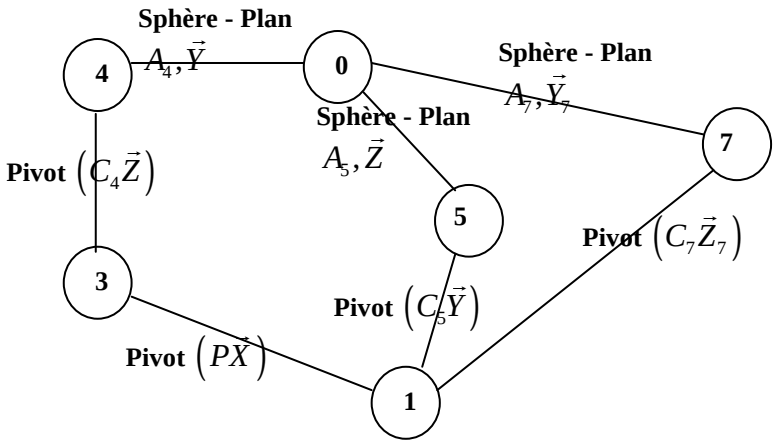
$$C_m = -J_{Teq} \frac{n}{R_p} \gamma_p + M_{totale} g \frac{R_p}{n}$$

D'où $C_m = -\frac{1,52.10^{-3}.4.20}{25.10^{-3}} + 240.\frac{25.10^{-3}}{4} = -0,7 \text{ Nm}$

Partie 2 : modélisation mécanique du robot 1

Question 2.1 :

Graphe des liaisons :



Question 2.2 :

- Déterminons la liaison équivalente entre 0 et 1 par la liaison en série 0 – 5 - -1.

Il suffit de composer les torseurs cinématiques des deux liaisons en série :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

$$ {}_{A_5}\{V_{0-5-1}(1/0)\} = {}_{A_5}\{V(1/5)\} + {}_{A_5}\{V(5/0)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \omega_{15Y} \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -R_{G5}\omega_{15Y} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} + \left\{ \begin{matrix} \omega_{50X} \\ \omega_{50Y} \\ \omega_{50Z} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} v_{50X} \\ v_{50Y} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

$$ {}_{A_5}\{V_{0-5-1}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{50X} \\ \omega_{50Y} + \omega_{15Y} \\ \omega_{50Z} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} v_{50X} - R_{G5}\omega_{15Y} \\ v_{50Y} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$. Soit le torseur cinématique d'une liaison sphère – plan de centre A_5 et de normale $\vec{Z}$

- En déduire la liaison équivalente à la liaison en série 0 – 7 – 1 :

La démarche est identique et le résultat similaire. On a donc comme liaison équivalente, une sphère – plan de centre A_7 et de normale $\vec{Y}_7$

Question 2.3 :

- Déterminons la liaison équivalente entre 0 et 1 par la liaison en série 0 – 4 - 3 - -1.

Il suffit de composer les torseurs cinématiques des trois liaisons en série :

$$ {}_{A_4}\{V_{0-4-3-1}(1/0)\} = {}_{A_4}\{V(1/3)\} + {}_{A_4}\{V(3/4)\} + {}_{A_4}\{V(4/0)\} $$

$$ = \left\{ \begin{matrix} \omega_{13X} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -Z_p\omega_{13X} \\ Y_P\omega_{13X} \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{34Z} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -R_{G4}\omega_{34Z} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} + \left\{ \begin{matrix} \omega_{40X} \\ \omega_{40Y} \\ \omega_{40Z} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} v_{40X} \\ 0 \\ v_{40Z} \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

$$ = \left\{ \begin{matrix} \omega_{13X} + \omega_{40X} \\ \omega_{40Y} \\ \omega_{34Z} + \omega_{40Z} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -R_{G4}\omega_{34Z} + v_{40X} \\ -Z_p\omega_{13X} \\ Y_P\omega_{13X} + v_{40Z} \end{matrix} \right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

Conclusion : Les six composantes (composition de 7 composantes indépendantes : les 7 ddl de la sphère – plan + 1 ddl pour chacune des deux pivots) sont indépendantes, on a donc une liaison libre, qui n'intervient donc pas dans la liaison globale entre 0 et 1.

En fait, ce sous ensemble qui est cinématiquement inutile, l'est donc en terme d'actions mécaniques si l'on prend en compte le ressort, puisque celui-ci **permet de maintenir** le contact en A_4 et ainsi **les contacts des 2 sphère – plan « utiles » à savoir celles en A_5 et en A_7**

Question 2.4 :

- Déterminons la liaison globale équivalente (sans le galet 6) entre 0 et 1 :

On peut récupérer les résultats précédents et faire un graphe des liaisons simplifiées :

La sphère plan $A_5, \vec{Z}$ bloque le degré de liberté suivant $\vec{Z}$ et la sphère plan $A_7, \vec{Y}_7$ bloque le degré de liberté suivant $\vec{Y}_7$, don une combinaison de mouvement suivant $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$.

Comme le mouvement suivant $\vec{Z}$ est bloqué, le mouvement suivant $\vec{Y}$ l'est aussi.

On a donc, comme liaison équivalente globale une liaison linéaire annulaire (ou sphère cylindre) d'axe, l'axe du cylindre 0.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

Démonstration analytique :

Plaçons nous en O, intersection des droites $A_5, \vec{Z}$ et $A_7, \vec{Y}_7$:

Pour trouver la liaison équivalente, il faut écrire l'égalité des torseurs cinématiques :

Notons R le rayon du cylindre 0 et α, l'angle entre $\vec{Y}$ et $\vec{Y}_7$:

Tout calcul fait (changement de points et changement de base !!!) , on obtient :

$$ {}_O\{V(1/0)\} = {}_O\{V_{eq\ galet5}(1/0)\} = {}_O\{V_{eq\ galet7}(1/0)\} $$

$$ = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{5X} & v_{5X} - R\omega_{5Y} \\ \omega_{5Y} & v_{5Y} + R\omega_{5X} \\ \omega_{5Z} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{7X} & v_{7X} - R\cos\alpha\omega_{7Z} + R\sin\alpha\omega_{7Y} \\ \omega_{7Y} & v_{7Z}\sin\alpha - R\sin\alpha\omega_{7X} \\ \omega_{7Z} & v_{7Z}\cos\alpha - R\cos\alpha\omega_{7X} \end{array}\right\}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

En étudiant les deux lignes d'équations relatives aux vitesses suivant $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$:

$$ v_Z = 0 = v_{7Z}\cos\alpha - R\cos\alpha\omega_{7X} $$
$$ v_Y = v_{5Y} + R\omega_{5X} = v_{7Z}\sin\alpha - R\sin\alpha\omega_{7X} $$

, on obtient

$$ v_Z = 0 = \cos\alpha\underbrace{(v_{7Z} - R\omega_{7X})}_{\text{donc } =0} $$
$$ v_Y = \sin\alpha(v_{7Z} - R\omega_{7X}) = 0 $$

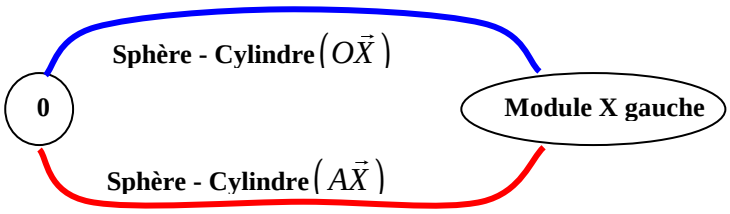
C'est-à-dire une liaison équivalente qui correspond bien à ce que l'on a démontré de façon qualitative.

A ce stade, l'énoncé n'est pas très clair car on ne sait pas si l'on doit, **comme cela devrait normalement être le cas**, prendre en compte la mise ne parallèle du montage associé au galet 6.

Le galet 6, en pivot d'axe $(C_6, \vec{Y})$ avec le chariot 1 et en sphère plan $A_6, \vec{Z}$ avec le cylindre 0, donne comme précédemment une liaison équivalente sphère plan $A_6, \vec{Z}$ entre 0 et 1 à mettre en parallèle avec la sphère – cylindre que l'on vient de trouver. Or cette liaison sphère plan $A_6, \vec{Z}$ ne supprimant pas de ddl par rapport à ceux de la sphère cylindre, **la liaison équivalente globale entre 0 et 1 demeure une sphère cylindre d'axe, l'axe du cylindre 0.**

Question 2.5 :

Réalisons un graphe des liaisons simplifié du module X gauche constitué du bâti (cylindre 0) et des deux chariots solidaires (en encastrement démontables) du module X gauche.



Il est donc évident que la mise en parallèle de ces deux liaisons identiques avec $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{X}$ donne une liaison pivot glissante :

$$ {}_O\{V_{eq}\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{eqX} & v_{eqX} \\ \omega_{eqY} & v_{eqY} \\ \omega_{eqZ} & v_{eqZ} \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{1X} & v_{1X} \\ \omega_{1Y} & 0 \\ \omega_{1Z} & 0 \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{2X} & v_{2X} \\ \omega_{2Y} & -\lambda\omega_{2Z} \\ \omega_{2Z} & \lambda\omega_{2Y} \end{array}\right\} $$

On a donc :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

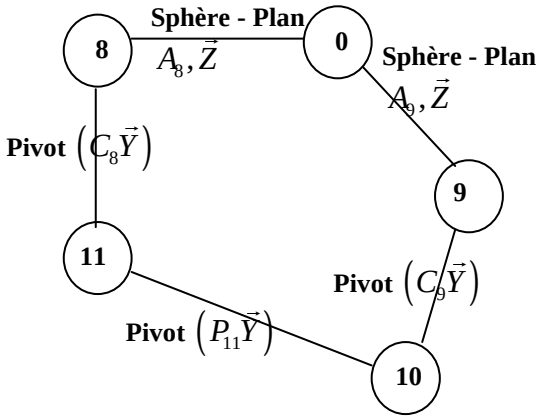
$\omega_Y = \omega_Z = 0$ en plus des degré de liberté bloqué par la liaison sphère cylindre, soit :

$$ {}_O\{V_{eq}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{eqX} & v_{eqX} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O $$

La liaison équivalente réalisée par les deux chariots constituants le module X gauche de la liaison glissière est une pivot glissante d'axe $(O\vec{X})$, c'est-à-dire l'axe du cylindre 0

Question 2.7 :

Graphe des liaisons :



Question 2.8 :

- Déterminons la liaison équivalente entre 0 et 10 par la liaison en série 0 – 9 - 10.

Il suffit de composer les torseurs cinématiques des deux liaisons en série :

$$ {}_{A_9}\{V_{0-9-10}(10/0)\} = {}_{A_9}\{V(10/9)\} + {}_{A_9}\{V(9/10)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & R_{G9}\omega_{109Y} \\ \omega_{109Y} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A_9,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} + \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{90X} & v_{90X} \\ \omega_{90Y} & v_{90Y} \\ \omega_{90Z} & 0 \end{array} \right\}_{A_9,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

$$ {}_{A_9}\{V_{0-9-10}(10/0)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_{90X} & v_{90X} + R_{G9}\omega_{109Y} \\ \omega_{90Y} + \omega_{109Y} & v_{90Y} \\ \omega_{90Z} & 0 \end{array} \right\}_{A_9,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})} $$

. Soit le torseur cinématique d'une liaison sphère – plan de centre A_9 et de normale $\vec{Z}$

- De la même façon, la liaison équivalente à la liaison en série 0 – 8 – 11 est identique et le résultat similaire. On a donc comme liaison équivalente, une sphère – plan de centre A_8 et de normale $\vec{Z}$
- Le fait de « rajouter » la liaison pivot entre 10 et 11, peut « rajouter » un degré de liberté à la liaison sphère plan équivalente à la série 0 – 8 - 11 :

$$ {}_{A_9}\{V_{0-8-11-10}(0/10)\} = {}_{A_9}\{V_{0-8-10}(0/11)\} + {}_{A_9}\{V(11/10)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \omega_X & v_X \\ \omega_Y & v_Y \\ \omega_Z & 0 \end{array} \right\}_{A_9} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -(R_{G8} + Z_{P11})\omega_{eqY} \\ \omega_{eqY} & 0 \\ 0 & -X_{P11}\omega_{eqY} \end{array} \right\}_{A_9} $$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

${}_{A_9}\{V_{0-8-11-10}(0/10)\} = \left\{\begin{array}{c|c} \omega_X & v_X + -(R_{G8}+Z_{P11})\omega_{eqY} \\ \omega_Y+\omega_{eqY} & v_Y \\ \omega_Z & -X_{P11}\omega_{eqY} \end{array}\right\}_{A_9}$. Soit le torseur cinématique d'une liaison libre puisque l'on a les six composantes qui sont toutes indépendantes.

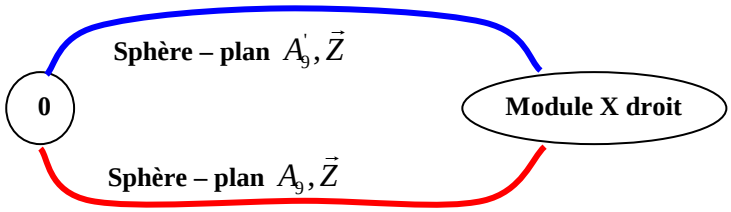
- Déterminons pour finir la liaison équivalente à la mise ne parallèle de cette sphère – plan avec la liaison libre :

Nous n'avons aucun calcul à faire puisque l'on a la mise en parallèle avec une liaison libre qui ne « supprimera » donc aucun degré de liberté à la sphère plan. **La liaison équivalente globale est donc une sphère - plan de centre A_9 et de normale $\vec{Z}$**

Question 2.9 :

- Déterminons la liaison équivalente globale réalisée par les deux chariots du module X droit :

Commençons par réaliser un graphe des liaisons pour poser le problème :



Notons A_9' le centre de la liaison sphère – plan du second chariot droit :
On a $\overrightarrow{A_9'A_9} = k\vec{X}$

Déterminons alors la liaison équivalente à la mise en parallèle de ces deux sphères – plan (montrons que l'on obtient une linéaire rectiligne):

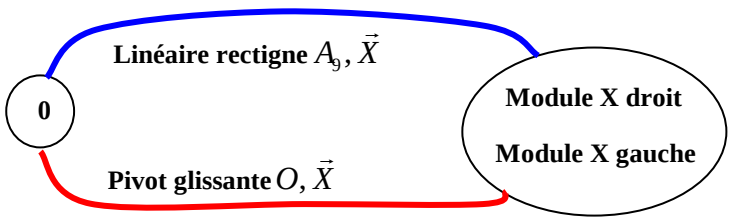
${}_{A_9}\{V_{eq}(0/\text{module X droit})\} = \left\{\begin{array}{c|c} \omega_{avX} & v_{avX} \\ \omega_{avY} & v_{avY} \\ \omega_{avZ} & 0 \end{array}\right\}_{A_9} = \left\{\begin{array}{c|c} \omega_{arX} & v_{arX} \\ \omega_{arY} & v_{arY}-k\omega_{arZ} \\ \omega_{arZ} & k\omega_{arY} \end{array}\right\}_{A_9}$

De l'équation entourée ci-dessus, on tire en plus de la translation suivant $\vec{Z}$ bloquée, la rotation suivant $\vec{Y}$, aussi bloquée. On a donc un torseur cinématique de la liaison équivalente de la forme : ${}_{A_9}\{V_{eq}(0/\text{module X droit})\} = \left\{\begin{array}{c|c} \omega_X & v_X \\ 0 & v_Y \\ \omega_Z & 0 \end{array}\right\}_{A_9}$.

C'est-à-dire une liaison équivalente de type linéaire rectiligne d'axe $(A_9\vec{X})$

Question 2.10 :

Commençons par réaliser un graphe des liaisons pour poser le problème :



© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

Déterminons alors la liaison équivalente à la mise en parallèle de cette linéaire rectiligne avec la pivot glissante (montrons que l'on obtient une glissière):

$$ {}_O\left\{V_{eq}\,(0/\text{module X})\right\} = {}_{A_9}\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{drX} & v_{drX} \\ 0 & v_{drY} \\ \omega_{drZ} & 0 \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{gauX} & v_{gauX} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\} $$

Reste à déplacer le torseur cinématique de la sphère cylindre du point A_9 (situé sur l'axe du cylindre 0 tel que $\overrightarrow{OA_9} = -R\vec{Z} + L\vec{Y}$ avec R rayon du cylindre 0 et L la longueur transversale séparant les deux chariots) au point O:

$$ {}_{A_9}\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{drX} & v_{drX} \\ 0 & v_{drY} \\ \omega_{drZ} & 0 \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{drX} & v_{drX} - L\omega_{drZ} \\ 0 & R\omega_{drX} \\ \omega_{drZ} & L\omega_{drX} \end{array}\right\} $$

On obtient donc le système d'équation ci-dessous :

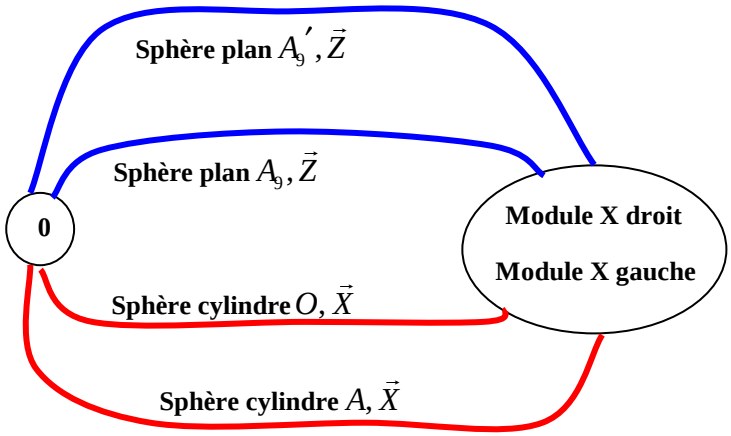
$$ {}_{A_9}\left\{V_{eq}\,(0/\text{module X})\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{eqX} & v_{eqX} \\ \omega_{eqY} & v_{eqY} \\ \omega_{eqZ} & v_{eqZ} \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{drX} & v_{drX} - L\omega_{drZ} \\ 0 & R\omega_{drX} \\ \omega_{drZ} & L\omega_{drX} \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} \omega_{gauX} & v_{gauX} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\} $$

De l'équation entourée ci-dessus, on tire en plus des mouvements « bloqués » par la liaison pivot glissante, la rotation suivant $\vec{X}$ On a donc un torseur cinématique de la liaison équivalente de la forme : ${}_O\left\{V_{eq}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & v_{eqX} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}$.

C'est-à-dire une liaison équivalente de type glissière d'axe $\vec{X}$

- Déterminons désormais le degré d'hyperstatisme de celle-ci :

Encore une fois, la question peut être ambiguë car on peut être tenté de calculer l'hyperstatisme de la mise en parallèle des deux liaisons équivalente au module droit et gauche alors qu'il faut « remonter » plus loin et calculer l'hyperstatisme global, c'est-à-dire à partir de la modélisation des quatre chariots qui composent les modules droit et gauche. Pour ce faire, réalisons un graphe des liaisons résumant tout cela :



On a donc un système à 1 mobilité utile (puisque la liaison équivalente est une glissière à 1 ddl) sans aucune mobilité interne.
On a 3 cycles indépendants, donc un nombre cyclomatique $\gamma = 3$
On a deux liaisons sphère-plan à chacune 5 ddl et deux liaisons sphère-cylindre à chacune 4ddl, soit au total un nombre d'inconnues cinématiques $N_C = 5+5+4+4 = 18$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

D'où d'après la relation donnant l'hyperstatisme à partir de ces trois données :
$h = m + 6\gamma - N_C = 1 + 6.3 - 18 = 1$

La liaison glissière réalisée est hyperstatique d'ordre 1.

Question 2.11 :

Exprimons les torseurs des différentes actions mécaniqu's qui s'exercent sur le sous ensemble S :

- Rail sur S par la liaison pivot glissante : $\left\{T_{A(0\to S)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$
- Rail sur S par la liaison ponctuelle : $\left\{T_{B(0\to S)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B\,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$
- Pesanteur sur SX : $\left\{T_{(\vec{g}\to SX)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{Bmatrix}_{G_X\,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$
- Pesanteur sur SY+SZ : $\left\{T_{(\vec{g}\to SY+SZ)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{Bmatrix}_{G_{YZ}\,(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$

Déterminons les inconnues de liaison en A et en B :
Pour cela on écrit le principe fondamental de la statique en A (c'est le point qui correspond au torseur le plus « difficile » analytiquement à déplacer.

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{Bmatrix}_{G_X} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{Bmatrix}_{G_{YZ}}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & -EZ_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & aM_X g \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & -C_Y M_{YZ} g \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{Bmatrix}_A$$

On a donc :
$$\begin{cases} Y_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ Z_B = \dfrac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] \\ Z_A = -\dfrac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] + \left[M_{YZ} + M_X\right] g \end{cases}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

Question 2.12 :

D'après la question précédente, le sens de la réaction dans la liaison ponctuelle dépend de la quantité : $aM_X - C_Y M_{YZ}$. C'est donc bien ce que l'on nous demandait de montrer.

L'appui a lieu sur le galet 9, si l'action de du bâti 0 sur SX est suivant $-\vec{Z}$, c'est-à-dire vers le bas (figure 2.4-a) ; soit sur le galet 9. Pour cela il faut donc $Z_B < 0$, soit : $\boxed{aM_X < C_Y M_{YZ}}$

Question 2.13 :

Application numérique :

$$Z_B = \frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] = \frac{10}{0.5}\left[0.2\times 230 - 0.5\times 120\right] = 20\left[46-60\right] = -280N$$

L'appui a donc bien lieu sur le galet fixe 9, il faut donc prendre des dispositions pour « plaquer » le galet 8. C'est ce qui est fait en interposant un ressort K_Z entre 10 et 11.

Question 2.14 :

Déterminons les nouvelles inconnues de liaison en A et en B :

Pour cela on écrit le principe fondamental de la dynamique en A (c'est le point qui correspond au torseur le plus « difficile » analytiquement à déplacer.

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \gamma_Y M_{YZ} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{G_{YZ}}}_{\{D(SY+SZ/0)\}} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{matrix}\right\}_{G_X} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{matrix}\right\}_{G_{YZ}}$$

$$\left\{\begin{matrix} 0 & C_Z\gamma_Y M_{YZ} \\ \gamma_Y M_{YZ} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & -EZ_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & aM_X g \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & -C_Y M_{YZ} g \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{matrix}\right\}_A$$

On a donc :

$$\begin{cases} Y_A = -\gamma_Y M_{YZ} \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ Z_B = \dfrac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] - \dfrac{1}{E} C_Z \gamma_Y M_{YZ} \\ Z_A = -\dfrac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] + \dfrac{1}{E} C_Z \gamma_Y M_{YZ} + \left[M_{YZ} + M_X\right] g \end{cases}$$

Question 2.15 :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.

La quantité $\frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right]$ étant négative, $\frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] = -280N$, numériquement, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} Y_A = -120\gamma_Y \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ Z_B = -280 - 48\gamma_Y \\ Z_A = 3780 + 48\gamma_Y \end{cases}$$

Sachant que les ressorts K_Y et K_Z sont situés respectivement en B et en A et que les ressorts sont sollicités :

- K_Y sollicité pour $Y_A < 0$, c'est-à-dire dans ce cas si $\gamma_Y < 0$
- K_Z sollicité pour $Z_B > 0$, c'est-à-dire dans ce cas si $\gamma_Y < -5{,}83\ \text{m.s}^{-2}$

Question 2.16 :

Déterminons les nouvelles inconnues de liaison en A et en B :

Pour cela on écrit le principe fondamental de la dynamique au sous ensemble (SY+SZ) en A (c'est le point qui correspond au torseur le plus « difficile » analytiquement à déplacer.

Comme le sous ensemble SY est immobile : $\left\{D\left(SY+SZ/0\right)\right\} = \left\{D\left(SZ/0\right)\right\}$

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_Z M_Z & 0 \end{matrix}\right\}_{G_{YZ}}}_{\left\{D(SZ/0)\right\}} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{matrix}\right\}_{G_X} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{matrix}\right\}_{G_{YZ}}$$

$$\left\{\begin{matrix} 0 & C_Y\gamma_Z M_Z \\ 0 & 0 \\ \gamma_Z M_Z & 0 \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & -EZ_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & aM_X g \\ 0 & 0 \\ -M_X g & 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} 0 & -C_Y M_{YZ} g \\ 0 & 0 \\ -M_{YZ} g & 0 \end{matrix}\right\}_A$$

On a donc :

$$\begin{cases} Y_A = 0 \\ M_A = 0 \\ N_A = 0 \\ Z_B = \frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] - \frac{1}{E} C_Y \gamma_Z M_Z \\ Z_A = -\frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] + \frac{1}{E} C_Y \gamma_Z M_Z + \left[M_{YZ} + M_X\right] g + \gamma_Z M_Z \end{cases}$$

Question 2.17 :

La quantité $\frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right]$ étant négative, $\frac{g}{E}\left[aM_X - C_Y M_{YZ}\right] = -280N$, numériquement, on peut donc écrire :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 41 pages.