RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

POLYNOMES

POLYNOMES

$\mathbb{K}$ représentera $\mathbb{R}$ pour les étudiants de la voie économique et indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour les étudiants de la voie scientifique (sauf bien-sûr lorsque cela leur sera précisé).

Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés les scalaires : ce seront les nombres réels pour la voie E et indifferemment les réels ou les complexes pour la voie scientifique.

DEFINITION : *Soit f une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est une application polynomiale (ou plus simplement un polynôme), s'il existe un nombre fini de scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que :*

pour tout $x \in \mathbb{K}$, on ait $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Les scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ s'appellent les coefficients de f.

Notations : Une fonction polynomiale s'écrira plutôt P, Q etc... c'est-à-dire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\forall x \in \mathbb{K}$, le polynôme s'écrira P (ou $P(X)$) $= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où X^k représente le polynôme $x \longmapsto x^k$ et la convention $X^0 = 1$: $x \longmapsto 1$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se notera $\mathbb{K}[X]$.

Un cas particulier, le polynôme nul . Un polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : ce polynôme s'appelle le polynôme nul et se notera (0)

Egalité de deux polynômes : soit deux polynômes P et Q définis par $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_k x^k$.

$P = Q$ si et seulement si $P = Q = (0)$ ou $p = q$ et $\forall k \in \{1 \dots p\}, a_k = b_k$.

DEGRE D'UN POLYNOME

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$; on appelle monôme l'application qui à $x \in \mathbb{K}$ associe ax^k.

Si $a = 0$, c'est l'application nulle ; si $a \neq 0$, le nombre k s'appelle degré du monôme.

DEFINITION : *Soit P un polynôme non nul : $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Il existe au moins un entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ (sinon le polynôme P serait le polynôme nul). Soit p le plus grand indice $i \in [\![0, n]\!]$, tel que $a_i \neq 0$. p s'appelle le degré du polynôme P et se note* $\deg P$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Donc $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: $\deg P = p$ équivaut à $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, avec $a_p \neq 0$.

les termes $a_i x^i$ où $i \in [\![0, p]\!]$ sont appelés monômes de degré i de P ; le terme a_p est appelé le terme dominant du polynôme P.

Convention : Le polynôme nul a pour degré $-\infty$

Notation : Soit n un entier naturel. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n se notera $\mathbb{K}_n[X]$. Il contient le polynôme nul.

OPERATIONS

ADDITION

Soient deux polynômes P et Q ; $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_k x^k$. On peut toujours supposer $p \leq q$. Appelons, d'une manière générale s le plus grand des deux entiers p et q, et écrivons

$Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} b_k x^k$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{k=s} a_k x^k$ (on rajoute $a_{p+1} = \cdots a_s = 0$, si $p < q$).

DEFINITION : *on définit la somme $P + Q$ par :*

$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} (a_k + b_k) x^k$. $\forall x \in \mathbb{K}$. C'est la définition habituelle de la somme des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ dans laquelle on a regroupé les monômes de même degré.

PROPRIETES

- L'addition est commutative : $P + Q = Q + P$, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
- L'addition est associative : $(P+Q)+R = P+(Q+R)$, $\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$.
- Le polynôme nul, noté (0), est élément neutre : $(0) + P = P + (0) = P$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$.
- Existence d'un opposé : pour tout polynôme P, il existe un unique polynôme S tel que $P + S = (0)$; si $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$, on a $S(x) = \sum_{k=0}^{k=n} -a_k x^k$. Ce polynôme S sera noté $-P$.

$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$, $(P + Q = P + R \Longleftrightarrow Q = R)$ (simplification).

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

DEFINITION : *Si P est un polynôme défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$, et si λ est un scalaire quelconque, on définit le produit $\lambda.P$ par la formule :*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.