



## RESUME DU COURS DE MATHÉMATIQUES



## ANALYSE

## POLYNOMES

## POLYNOMES

$\mathbb{K}$  représentera  $\mathbb{R}$  pour les étudiants de la voie économique et indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  pour les étudiants de la voie scientifique (sauf bien sûr lorsque cela leur sera précisé).

Les éléments de  $\mathbb{K}$  seront appelés les scalaires : ce seront les nombres réels pour la voie E et indifféremment les réels ou les complexes pour la voie scientifique.

**DEFINITION :** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est une application polynomiale (ou plus simplement un polynôme), s'il existe un nombre fini de scalaires  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :

pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , on ait  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

Les scalaires  $a_0, a_1, \dots, a_n$  s'appellent les coefficients de  $f$ .

**Notations :** Une fonction polynomiale s'écrira plutôt  $P, Q$  etc... c'est-à-dire  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \forall x \in \mathbb{K}$ , le polynôme s'écrira  $P$  (ou  $P(X)$ ) =  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$

où  $X^k$  représente le polynôme  $x \mapsto x^k$  et la convention  $X^0 = 1 : x \mapsto 1$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  se notera  $\mathbb{K}[X]$ .

**Un cas particulier, le polynôme nul .** Un polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : ce polynôme s'appelle le polynôme nul et se notera (0)

**Egalité de deux polynômes :** soit deux polynômes  $P$  et  $Q$  définis par

$$\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_k x^k.$$

$P = Q$  si et seulement si  $P = Q = (0)$  ou  $p = q$  et  $\forall k \in \{1 \dots p\}, a_k = b_k$ .

**DEGRE D'UN POLYNOME**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{K}$  ; on appelle monôme l'application qui à  $x \in \mathbb{K}$  associe  $ax^k$ .

Si  $a = 0$ , c'est l'application nulle ; si  $a \neq 0$ , le nombre  $k$  s'appelle degré du monôme.

**DEFINITION :** Soit  $P$  un polynôme non nul :  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ . Il existe au moins un entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $a_k \neq 0$  (sinon le polynôme  $P$  serait le polynôme nul). Soit  $p$  le plus grand indice  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , tel que  $a_i \neq 0$ .  $p$  s'appelle le degré du polynôme  $P$  et se note  $\deg P$ .

page 1

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

## 2 Polynômes

Donc  $p \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  :  $\deg P = p$  équivaut à  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$ , avec  $a_p \neq 0$ .

les termes  $a_ix^i$  où  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$  sont appelés monômes de degré  $i$  de  $P$  ; le terme  $a_px^p$  est appelé le terme dominant du polynôme  $P$ .

**Convention :** Le polynôme nul a pour degré  $-\infty$

**Notation :** Soit  $n$  un entier naturel. L'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  dont le degré est inférieur ou égal à  $n$  se notera  $\mathbb{K}_n[X]$ . Il contient le polynôme nul.

---

---

# OPERATIONS

---

---

## ADDITION

Soient deux polynômes  $P$  et  $Q$  ;  $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$  et  $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_k x^k$ . On peut toujours supposer  $p \leq q$ . Appelons, d'une manière générale  $s$  le plus grand des deux entiers  $p$  et  $q$ , et écrivons

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} b_k x^k \text{ et } P(x) = \sum_{k=0}^{k=s} a_k x^k \text{ (on rajoute } a_{p+1} = \dots = a_s = 0, \text{ si } p < q \text{).}$$

**DEFINITION :** on définit la somme  $P + Q$  par :

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} (a_k + b_k) x^k. \quad \forall x \in \mathbb{K}. \text{ C'est la définition}$$

habituelle de la somme des applications de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  dans laquelle on a regroupé les monômes de même degré.

## PROPRIETES

- L'addition est commutative :  $P + Q = Q + P$ ,  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ .
- L'addition est associative :  $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ ,  $\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$ .
- Le polynôme nul, noté  $(0)$ , est élément neutre :  $(0) + P = P + (0) = P$ ,  $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ .
- Existence d'un opposé : pour tout polynôme  $P$ , il existe un unique polynôme  $S$  tel que  $P + S = (0)$  ; si  $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ , on a  $S(x) = \sum_{k=0}^{k=n} -a_k x^k$ .

Ce polynôme  $S$  sera noté  $-P$ .

$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$ ,  $(P + Q = P + R \iff Q = R)$  (simplification).

## MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

**DEFINITION :** Si  $P$  est un polynôme défini par  $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$ , et si  $\lambda$  est un

scalaire quelconque, on définit le produit  $\lambda.P$  par la formule :

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.