



RESUME DU COURS DE MATHÉMATIQUES



ESPACES

VECTORIELS

ESPACES VECTORIELS

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ représente \mathbb{R} ou \mathbb{C} pour la voie scientifique. Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les scalaires.

DEFINITION : Soit E un ensemble non vide sur lequel on a défini une loi de composition interne (application de $E \times E$ dans E), notée additivement, et une loi de composition externe admettant \mathbb{K} comme ensemble d'opérateurs (application de $\mathbb{K} \times E$ dans E).

On dit que E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou un \mathbb{K} -ev) si et seulement si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

- Pour l'addition, loi de composition interne ;

$$\forall (x, y, z) \in E^3$$

Commutativité : $x + y = y + x$.

Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$ (résultat noté $x + y + z$).

Existence d'un élément neutre, c'est-à-dire : il existe dans E un unique élément, noté 0_E , satisfaisant à la propriété suivante :

$$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

Existence d'un symétrique pour chaque élément de E , appelé opposé, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, il existe un unique élément de E , noté $-x$, tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

- Pour la loi de composition externe sur \mathbb{K} , appelée multiplication par un scalaire,

$$\forall (x, y) \in E^2, \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x ; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ; \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x ; \text{ résultat noté } \lambda\mu x ; 1x = x.$$

Remarque : Les éléments de E sont appelés les vecteurs

Exemples fondamentaux

$$\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X]$$

L'ensemble des applications définies sur une partie X de \mathbb{R} , l'ensemble des applications de classe C^n sur une partie X de \mathbb{R} . En particulier, pour $n = 0$ (fonctions continues sur X) et $n = 1$ (fonctions dérivables à dérivée continue) etc...

2 Espaces vectoriels

Règles de calcul dans les espaces vectoriels

$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + z = y + z \iff x = y).$

$\forall (x, y) \in E^2, \exists ! z \in E / x + z = y.$ Cet élément z vaut $y + (-x)$ et on le note $y - x.$

$\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} ; \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0) \text{ ou } (x = 0_E).$

$\forall x \in E, (-1)x = -x$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda x = \lambda y \iff (\lambda = 0) \text{ ou } x = y.$

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda x = \mu x \iff (x = 0_E) \text{ ou } (\lambda = \mu).$

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous ensemble (non vide) de $E.$

DEFINITION : On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un espace vectoriel pour les deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, qui font de E un \mathbb{K} espace vectoriel .

CRITERES

Un sous-ensemble F , non vide, d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F$ et $\lambda x \in F.$
ou
- $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \alpha) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \alpha y \in F.$
ou
- $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F.$

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $0_E \in F$; donc si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de $E.$

INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de $E.$

COMBINAISONS LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , x_1, x_2, \dots, x_n n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n éléments de $\mathbb{K}.$

DEFINITION : Le vecteur $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ s'appelle combinaison linéaire des vecteurs x_i , les scalaires λ_i étant les coefficients de la combinaison linéaire.

TERMINOLOGIE : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et x_1, \dots, x_n n vecteurs de E .

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n se note $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

PROPOSITION : $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est sous-espace vectoriel de E .

GENERATEURS

DEFINITION : (x_1, x_2, \dots, x_n) s'appelle une famille génératrice de

$\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On dira, de manière équivalente, que $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est engendré par la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) .

DEFINITION : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E et (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de vecteurs de E . On dit que cette famille est génératrice de F si et seulement si tous les vecteurs u_i sont dans F et tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i . Cela revient à $F = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

EXEMPLES CLASSIQUES

Exemple-1 : $E = \mathbb{K}^n$. Considérons la famille $(e_1, e_2, \dots, e_i \dots e_n)$ des vecteurs de E définis de la manière suivante :

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (le chiffre 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place), est la famille génératrice canonique de \mathbb{K}^n .

Exemple-2 : $E = \mathbb{K}_n[X]$. Considérons la famille P_k , ($0 \leq k \leq n$) d'éléments de E définis de la manière suivante : $\forall x \in \mathbb{K}$, $P_k(x) = x^k$ (autrement dit P_k est le monôme de degré k de coefficient 1) est la famille génératrice canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque : le polynôme P_k est aussi noté X^k

Exemple-3 : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\forall (i, j) \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq p$, $E_{i,j}$ est la matrice de E dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne et qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})$ s'appelle la famille génératrice canonique de E .

FAMILLES DE VECTEURS

DEFINITION : On dit que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si et seulement si l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E$, d'inconnues les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n'a pas d'autre solution que la solution, dite triviale, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

4 Espaces vectoriels

DEFINITION : On dit que la famille (u_1, \dots, u_n) est liée (ou que les vecteurs sont linéairement dépendants) si et seulement s'il existe n scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ **non tous nuls** tels que $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n = 0_E$.

Remarque –1 : il apparaît que les notions de famille libre et de famille liée sont contraires : une famille de vecteurs de E est libre ou (exclusif) liée.

Remarque –2 : pour décider si une famille (u_1, \dots, u_n) de vecteurs de E est libre ou liée, on considère l'équation

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \quad \text{et on entreprend de la résoudre :}$$

* S'il n'y a que la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, on conclut que la famille est libre,

** sinon, on exhibe un n -uplet (b_1, b_2, \dots, b_n) , b_1, b_2, \dots, b_n **non tous nuls**, solution de l'équation et on conclut que la famille est liée.

PROPRIETES DES FAMILLES DE VECTEURS

- –1 Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.
- –2 Toute famille de vecteurs qui contient une famille liée est elle même est liée.
- –3 Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- –4 Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque : deux vecteurs u, v forment une famille liée si et seulement si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire k tel $u = kv$ ou $v = ku$.

On dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

Dans le cas de vecteurs de \mathbb{K}^n , cela signifie que les deux n -uplets sont proportionnels.

BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

DEFINITION : Une famille (u_1, \dots, u_n) d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E .

BASES CANONIQUES

- Dans \mathbb{K}^n , la famille génératrice canonique (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille génératrice canonique (P_0, \dots, P_n) est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Remarque : On pose aussi $X^k = P_k$ avec $X^0 = 1 = P_0$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille génératrice canonique $(E_{i,j}) / 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$