RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

DIAGONALISATION

$\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour la voie scientifique. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

CHANGEMENT DE BASE

MATRICE DE PASSAGE D'UNE BASE A UNE AUTRE

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E

Les vecteurs ε_j, pour $j \in [\![1, n]\!]$ s'expriment dans la base $\mathcal{B}_1$:

$\forall j \in [\![1, n]\!]\ \exists !(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n\ /\ \varepsilon_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots + a_{i,j}e_i + \cdots + a_{n,j}e_n.$

Ce que nous pouvons écrire de manière plus concise : $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$.

Notons C_j la matrice colonne des coordonnées de ε_j dans la base $\mathcal{B}_1$:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

DEFINITION : *On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ la matrice notée $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_n$.*

Donc P est la matrice de terme général $a_{i,j}$:

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque : si l'on regarde P comme la matrice d'un endomorphisme f de E, alors $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \varepsilon_j$. L'image d'une base de E est une base de E, donc f est un automorphisme de E et sa matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice depassage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

CHANGEMENT DE BASE POUR UN VECTEUR

Formule de changement de base pour un vecteur :

Soit X et X' les matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle, dans deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Si l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a la formule suivante : $X = PX'$, qui équivaut à $X' = P^{-1}X$

CHANGEMENT DE BASE POUR UN ENDOMORPHISME

Formule de changement de base pour un endomorphisme

Soit A et A' les matrices d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle dans deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Si l'on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, on a la formule suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque : cette formule s'appelle aussi formule de changement de base pour une matrice carrée.

MATRICES SEMBLABLES

DEFINITION : *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, telle que : $B = P^{-1}AP$.*

Remarque : Si $B = P^{-1}AP$, alors $A = PBP^{-1}$; donc si l'on pose $Q = P^{-1}$, cette égalité devient $A = Q^{-1}BQ$, c'est dire que B est semblable à A. On dira donc que A et B sont semblables.

Proposition : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

A et B sont semblables si et seulement s'il existe un endomorphisme f et deux bases de E tels que A et B soient les matrices de f dans ces deux bases de E.

Remarque : on a quelques propriétés évidentes :

- A est semblable à A ($P = I_n$).
- Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

MATRICES EQUIVALENTES

DEFINITION : *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et s'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversible telles que : $B = RAP$.*

Remarque : A équivalente à B équivaut à B équivalente à A (on dira que A et B sont équivalentes).

A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentent les matrices d'une même application linéaire, écrites dans des bases différentes de E et de F.

Cette notion de matrices équivalentes est bien-sûr valable si $p = n$, donc pour les matrices carrées et on a d'ailleurs la proposition suivante.

PROPOSITION : Soit A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B semblables $\Longrightarrow$ A et B équivalentes.

La réciproque est fausse.

ELEMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

VALEURS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

DEFINITION : *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel non nul et f un endomorphisme de E. Un scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

PROPOSITION EQUIVALENTE

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel non nul et f un endomorphisme de E. Un scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Remarque : **soit f un endomorphisme de E ; alors** $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id}_E)$**, donc f n'est pas injectif si et seulement si 0 est valeur propre de f.**

Il est équivalent de dire : f est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

CARACTERISATION D'UNE VALEUR PROPRE

Soit un scalaire λ et f un endomorphisme de E. λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur u **non nul** de E tel que $f(u) = \lambda u$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.