RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ALGEBRE

BILINEAIRE

L'ESPACE VECTORIEL NORME $\mathbb{R}^n$

NORMES SUR $\mathbb{R}^n$

NORMES ET DISTANCES ASSOCIEES

DEFINITION : *On appelle norme sur* $\mathbb{R}^n$ *toute application* $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant :*

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

iii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

DEFINITION : *On appelle distance associée à la norme* N *sur* $\mathbb{R}^n$ *l'application définie sur* $(\mathbb{R}^n)^2$ *par :* $d(x, y) = N(x - y) = N(y - x)$.

Notation : Une norme N sur $\mathbb{R}^n$ est souvent notée $||.||$, c'est-à-dire $N(x) = ||x||$.

Exemples : Etant donné une base B de E,

a) Une norme euclidienne associée à $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sera définie par

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ ;$$

b) Une norme " infinie " associée à $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sera définie par

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ ||x||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|\ ;$$

PROPOSITION : Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et d la distance associée.

i) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ et $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \Big|\,||x|| - ||y||\,\Big| \leq ||x - y||$

iii) $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

NORMES EQUIVALENTES

DEFINITION : *Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe $(k, k') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ kN_1(x) \leq N_2(x) \leq k'N_1(x)$$

PROPOSITION : Les normes $||.||_2$ et $||.||_\infty$ associées à une base B de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

PARTIES REMARQUABLES DE $\mathbb{R}^n$

On considère une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ et la distance d associée.

Boules ouvertes et fermées

DEFINITION : *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$:*

∗ *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$, défini par :*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a, x) < r\}$$

∗ *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a, r)$ (ou $B'(a, r)$), défini par :*

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a, x) \leq r\}$$

∗ *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $S(a, r)$ défini par :*

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a, x) = r\}$$

Exemple : Si $||.||_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\forall x = (x_1, x_2),\ ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

$B(a, r)$ est l'intérieur du disque de centre a et de rayon r, $B_f(a, r)$ est le disque entier (cercle compris) et $S(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

DEFINITION : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$*

∗ *A est une partie ouverte si et seulement si*

$$(A = \emptyset)\ ou\ (\forall a \in A,\ \exists\, r > 0,\ B(a, r) \subset A)$$

∗ *A est une partie fermée si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}^n - A$ est ouvert*

∗ *A est une partie bornée si et seulement si $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ ||x|| \leq M$ (ce qui revient à dire que $A \subset B_f(0, M)$)*

Exemple $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

PROPOSITION : Soit deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^n$, équivalentes.

- Toute boule ouverte pour N_1 est contenue dans une boule ouverte pour N_2 et contient une boule ouverte pour N_2.
- Toute partie ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_1 est ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_2

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Remarque : c'est le cas lorsque les normes N_1 et N_2 sont les normes $||.||_2$ et $||.||_\infty$ associées à une base de $\mathbb{R}^n$

Dorénavant, nous désignerons par $||.||$ l'une des deux normes $||.||_2$ ou $||.||_\infty$ canoniques

PROPOSITION :

- Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

$]a,b[,\ ]-\infty,a[,\ ]a,+\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$

$[a,b],\ ]-\infty,a],\ [a,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$

PROPOSITION : Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement s'il existe $(M_1,\ldots,M_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que : $\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in A$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |x_i| \leq M_i$

Adhérence et intérieur

DEFINITION : *Soit $A \in \mathbb{R}^n$, on appelle adhérence de A la partie de $\mathbb{R}^n$, notée* $\mathrm{ad}(A)$ *et définie par :*

$$x \in \mathrm{ad}(A) \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

DEFINITION : *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on appelle intérieur de A la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathring{A}$ et définie par :*

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists\, r > 0,\ B(x,r) \subset A$$

Remarque : $\mathring{A} \subset A \subset \mathrm{ad}(A)$

Les définitions de $\mathrm{ad}(A)$ et $\mathring{A}$ sont indépendantes de la norme $||.||$ choisie ($||.||_2$ ou $||.||_\infty$ canoniques).

PRODUIT SCALAIRE

PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

PRODUIT SCALAIRE

DEFINITION : *Soit E un espace vectoriel réel. Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

i) bilinéaire si

$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(ax+by,z) = a\varphi(x,z) + b\varphi(y,z)$

et si

$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,ay+bz) = a\varphi(x,y) + b\varphi(x,z),$

ii) symétrique si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

iii) définie positive si

$$\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$$

DEFINITION : *Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.*

$\varphi(x,y)$ sera souvent noté $< x,y >$ ou $(x|y)$

PROPOSITION–1 : Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique, linéaire d'un côté et définie positive.

Exemples classiques de produit scalaires canoniques :

Sur $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \ldots, y_n),\ < x,y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ < X,Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX.$$

Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: $< f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$

PROPOSITION–2 : Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$, $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, $(y_1,\ldots,y_n) \in E^n$,
$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j >= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_i \beta_j < x_i, y_j >$$

NORME EUCLIDIENNE

DEFINITION : *Soit $< . >$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E, on associe sa norme euclidienne :*

$$\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{< x,x >}$$

un vecteur x est dit normé ou unitaire si $||x|| = 1$.

PROPOSITION–3 : $\forall (a,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

i) $||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$

ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||.$

iii) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x,y >$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.