RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ALGEBRE BILINEAIRE

L'ESPACE VECTORIEL NORME $\mathbb{R}^n$

NORMES SUR $\mathbb{R}^n$

NORMES ET DISTANCES ASSOCIEES

DEFINITION : *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :*

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

DEFINITION : *On appelle distance associée à la norme N sur $\mathbb{R}^n$ l'application définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$ par : $d(x,y) = N(x-y) = N(y-x)$.*

Notation : Une norme N sur $\mathbb{R}^n$ est souvent notée $||.||$, c'est-à-dire $N(x) = ||x||$.

Exemples : Etant donné une base B de E,

a) Une norme euclidienne associée à $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sera définie par $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ ||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$;

b) Une norme " infinie " associée à $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sera définie par $\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,\ ||x||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$;

<u>**PROPOSITION**</u> : Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et d la distance associée.

i) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ d(x,y) = d(y,x)$ et $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x-y||$

iii) $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

NORMES EQUIVALENTES

DEFINITION : *Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe $(k,k') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ kN_1(x) \leq N_2(x) \leq k'N_1(x)$$

PROPOSITION : Les normes $||.||_2$ et $||.||_\infty$ associées à une base B de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

PARTIES REMARQUABLES DE $\mathbb{R}^n$

On considère une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ et la distance d associée.

Boules ouvertes et fermées

DEFINITION : *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$:*

$*$ *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$, défini par :*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a,x) < r\}$$

$*$ *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a,r)$ (ou $B'(a,r)$), défini par :*

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a,x) \leq r\}$$

$*$ *On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $S(a,r)$ défini par :*

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\ , d(a,x) = r\}$$

Exemple : Si $||.||_2$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\forall x = (x_1, x_2),\ ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

$B(a,r)$ est l'intérieur du disque de centre a et de rayon r, $B_f(a,r)$ est le disque entier (cercle compris) et $S(a,r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

DEFINITION : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$*

$*$ *A est une partie ouverte si et seulement si*

$$(A = \emptyset) \text{ ou } (\forall a \in A,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset A)$$

$*$ *A est une partie fermée si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}^n - A$ est ouvert*

$*$ *A est une partie bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ ||x|| \leq M$ (ce qui revient à dire que $A \subset B_f(0,M)$)*

Exemple $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

PROPOSITION : Soit deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^n$, équivalentes.

- Toute boule ouverte pour N_1 est contenue dans une boule ouverte pour N_2 et contient une boule ouverte pour N_2.
- Toute partie ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_1 est ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_2

Remarque : c'est le cas lorsque les normes N_1 et N_2 sont les normes $||.||_2$ et $||.||_\infty$ associées à une base de $\mathbb{R}^n$

Dorénavant, nous désignerons par $||.||$ l'une des deux normes $||.||_2$ ou $||.||_\infty$ canoniques

<u>PROPOSITION</u> :

- Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

$]a, b[, \ ]-\infty, a[, \ ]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$

$[a, b], \ ]-\infty, a], \ [a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$

<u>PROPOSITION</u> : Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement s'il existe $(M_1, \ldots, M_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que : $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], \ |x_i| \leq M_i$

<u>Adhérence et intérieur</u>

DEFINITION : *Soit $A \in \mathbb{R}^n$, on appelle adhérence de A la partie de $\mathbb{R}^n$, notée* $\mathrm{ad}(A)$ *et définie par :*

$$x \in \mathrm{ad}(A) \Longleftrightarrow \forall r > 0, \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

DEFINITION : *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on appelle intérieur de A la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathring{A}$ et définie par :*

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0, \ B(x, r) \subset A$$

Remarque : $\mathring{A} \subset A \subset \mathrm{ad}(A)$

Les définitions de $\mathrm{ad}(A)$ et $\mathring{A}$ sont indépendantes de la norme $||.||$ choisie ($||.||_2$ ou $||.||_\infty$ canoniques).

PRODUIT SCALAIRE

PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

<u>PRODUIT SCALAIRE</u>

DEFINITION : *Soit E un espace vectoriel réel. Une application $\varphi \ : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est* *i) bilinéaire si*

$\forall(x,y,z)\in E^3,\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(ax+by,z)=a\varphi(x,z)+b\varphi(y,z)$

et si

$\forall(x,y,z)\in E^3,\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x,ay+bz)=a\varphi(x,y)+b\varphi(x,z),$

ii) symétrique si

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$$

iii) définie positive si

$$\forall x\in E,\ \varphi(x,x)\geq 0 \text{ et } \varphi(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0_E$$

DEFINITION : *Un produit scalaire sur E est une application $\varphi\ :\ E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.*

$\varphi(x,y)$ sera souvent noté $<x,y>$ ou $(x|y)$

PROPOSITION−1 : Une application $\varphi\ :\ E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ est un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique, linéaire d'un côté et définie positive.

Exemples classiques de produit scalaires canoniques :

Sur $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique :

$x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, $<x,y>=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k.$

Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique :

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, $<X,Y>=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k={}^tXY={}^tYX.$

Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: $<f,g>=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt.$

PROPOSITION−2 : Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, $(y_1,\dots,y_n)\in E^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$, alors

$$<\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i,\sum_{j=1}^{n}\beta_jy_j>=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}\lambda_i\beta_j<x_i,y_j>$$

NORME EUCLIDIENNE

DEFINITION : *Soit $<.>$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E, on associe sa norme euclidienne :*

$$\forall x\in E,\ ||x||=\sqrt{<x,x>}$$

un vecteur x est dit normé ou unitaire si $||x||=1$.

PROPOSITION−3 : $\forall(a,y)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},$

i) $||x||\geq 0$ et $||x||=0\Longleftrightarrow x=0_E$

ii) $||\lambda x||=|\lambda|||x||.$

iii) $||x+y||^2=||x||^2+||y||^2+2<x,y>$