



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



## ANALYSE

## SUITES NUMERIQUES

## SUITES NUMERIQUES

**DEFINITION :** Une suite numérique est une application d'un intervalle de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si l'intervalle est du type  $[[n_0, n_1]]$ , la suite est finie ; si l'intervalle est du type  $[[n_0, +\infty[$ , la suite est infinie et c'est de ce genre de suite dont nous allons parler.

## QUALIFICATIONS

**DEFINITION :** Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante (resp strictement croissante) si :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{resp } u_n < u_{n+1}) \text{ ou encore}$$

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad (\text{resp } u_{n+1} - u_n > 0).$$

**Remarque :** si la suite  $(u_n)$  est à termes **strictement positifs**,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Pour les suites définies par  $u_n = f(n)$ , l'étude de la variation de la suite  $(u_n)$  peut se faire en étudiant la variation de la fonction  $f$ .

**DEFINITION :** Une suite  $(u_n)$  est décroissante (resp strictement décroissante)

$$\text{si : } \forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n \geq u_{n+1} \quad (\text{resp } u_n > u_{n+1}).$$

**Remarque :** Si la suite  $(u_n)$  est à termes **strictement positifs**,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

**DEFINITION :** On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition analogue pour strictement monotone.

**SUITES PARTICULIERES**

• Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est constante s'il existe un réel  $a$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n = a.$$

• Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est stationnaire s'il existe un rang  $n_1 \geq n_0$  à partir duquel  $(u_n)$  est constante.

• Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est périodique s'il existe un entier  $p > 0$  tel que  $\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_{n+p} = u_n$ .

## 2 Suites numériques

$p$  s'appelle une « période de la suite ». Si c'est le plus petit entier strictement positif satisfaisant à la définition, il s'appelle la période.

**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  est périodique et de période 2 car  $(-1)^{n+2} = (-1)^n$  et  $(-1)^{n+1} \neq (-1)^n$ .

---

### LIMITE D'UNE SUITE REELLE

---

**DEFINITIONS :** Soit  $\ell$  un nombre réel. On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \geq n_0}$  admet  $\ell$  pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0 / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela veut dire aussi que  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$  ou  $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ .

**Écritures permises :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \geq n_0 / \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

Ceci traduit le fait que  $u_n$  devient de plus en plus grand quand  $n \rightarrow +\infty$  puisqu'il « finit » par dépasser n'importe quel nombre  $A$  fixé à l'avance.

- On dit qu'une suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \geq n_0 / \forall n \geq N, u_n \leq B.$$

Ceci traduit le fait que  $u_n$  devient de plus en plus petit (au sens algébrique du terme) quand  $n \rightarrow +\infty$  puisqu'il « finit » par être plus petit que n'importe quel nombre  $B$  fixé à l'avance.

Une suite qui a pour limite  $-\infty$  est une suite à valeurs négatives (au moins à partir d'un certain rang), dont la valeur absolue a pour limite  $+\infty$ .

---

### SUITES CONVERGENTES

### DIVERGENTES

---

**DEFINITION :** On dit qu'une suite est convergente s'il existe un réel  $\ell$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

On dira aussi que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**DEFINITION :** Une suite  $(u_n)$  est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente.

- Une suite est divergente si elle n'a pas de limite réelle c'est-à-dire si elle a une limite infinie ou si elle n'a pas de limite du tout.

### UNICITE DE LA LIMITE

**THEOREME** Si une suite admet une limite (réelle ou infinie), cette limite est unique.

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

**OPERATIONS SUR LES LIMITES**

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles : il suffit de se reporter aux tableaux opérations sur les limites pages 12, 13 et 14 et de remplacer  $f$  et  $g$  par  $(u_n)$  et  $(v_n)$

**SUITES EQUIVALENTES**

**DEFINITION :** Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est équivalente à une suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  s'il existe une suite  $(r_n)_{n \geq n_1}$  ( $n_1 \geq n_0$ ) telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$  et  $\forall n \geq n_1, u_n = v_n \times r_n$ .

Cela revient à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$  lorsque  $v_n$  est non nul pour  $n \geq n_1$ .

**Ecriture :** On écrira  $(u_n) \underset{(+\infty)}{\sim} (v_n)$  ou  $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} v_n$  ou  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ .

Dans la pratique, les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang  $N$ , donc  $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} v_n \iff v_n \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$ . On dira  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes.

**PROPRIETES**

- $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n) \implies (u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n)$ .
- Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites équivalentes.  
 $((u_n) \text{ a une limite (réelle ou infinie)}) \implies ((v_n) \text{ a une limite et c'est la même que celle de } (u_n))$ .
- $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ et } a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n) \implies (u_n \cdot a_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \cdot b_n)$ .
- Dans les mêmes hypothèses que précédemment, si de plus il existe un rang à partir duquel  $a_n \neq 0$  ainsi que  $b_n$ , on a :

$$\frac{u_n}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{b_n}$$

**Retenons :** On obtient une suite équivalente au produit ou au quotient de deux suites en y remplaçant l'une (au moins) d'entre elles par une suite équivalente. **Conséquence :** on ne change pas la limite d'un produit ou d'un quotient de suites en y remplaçant certaines d'entre elles par des équivalents. D'où l'intérêt de connaître des équivalents simples.

$\mathbb{Z} \rightarrow$  Aucune suite  $(u_n)$ , sauf la suite nulle ou stationnaire et valant alors 0, à partir d'un certain rang, n'est équivalente à 0.

$\mathbb{Z} \rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$  n'implique pas (en général)  $(u_n + a_n) \underset{+\infty}{\sim} (v_n + b_n)$ .

**EQUIVALENCES CLASSIQUES**

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0 \implies u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \implies \ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \implies e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$ .
- Un polynôme non nul (de la variable  $n$ ) est équivalent en  $+\infty$  à son monôme de plus haut degré.

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

#### 4 Suites numériques

• Une fraction rationnelle non nulle (de la variable  $n$ ) est équivalente en  $+\infty$  au quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

•  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  et  $u_n$  et  $v_n$  positifs strictement n'impliquent pas (en général)  $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$ .

Mais si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \neq 1$ , alors :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$ .

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  ou  $+\infty$ .

•  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  n'implique pas (en général)  $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ .

En règle générale on ne compose pas les équivalents.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \implies 1 - \cos u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \implies \sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

### SUITE NEGLIGEABLE

### DEVANT UNE AUTRE SUITE

**DEFINITION :** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites réelles. On dit que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est négligeable devant  $(v_n)_{n \geq n_0}$  s'il existe une suite réelle  $(t_n)$ , définie à partir d'un rang  $n_1 \geq n_0$ , telle que :

$$\text{Pour } n \geq n_1, u_n = v_n \cdot t_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0.$$

**Ecriture :** On écrit  $(u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$ .

Si  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang (ce qui est le cas général),

$$((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)) \iff \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \right).$$

#### PROPRIETES :

- $((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n))$  et  $((v_n) \underset{+\infty}{=} \circ(w_n)) \implies ((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(w_n))$ .
- $((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n))$  et  $(v_n) \underset{+\infty}{\sim} (w_n) \implies (u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(w_n)$ .
- $((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n))$  et  $(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (w_n) \implies (w_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$ .
- $((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)) \implies (u_n + v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n$

#### EXEMPLES CLASSIQUES

- $\ln n \underset{+\infty}{=} \circ(n)$ . ;  $n \underset{+\infty}{=} \circ(e^n)$ .
- $n^\alpha \underset{+\infty}{=} \circ(e^{\beta n})$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ . (croissances comparées) ; cela se traduit par :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta n}}{n^\alpha} = +\infty, & \text{pour } \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha n} \times n^\beta = 0, & \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$